Math. Un.

212 m. 2

Winterfeld, M. A. v.,

J. Gerstner.

<366355860300019

<366355860300019

Bayer. Staatsbibliothek

Anfangsgründe
der
Mathematik,
zum
Gebrauch in Schulen
und für
Selbstlehrlinge.

Abgefasst
von
M. A. von Winterfeld,
königl. preussischen Major.

Zweiter Teil,
welcher
die Arithmetik
enthält.

Zweite verbesserte Auflage.

Braunschweig,
in der Schulbuchhandlung. 1802.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Arithmetik.

Erstes Buch
Von ganzen Zahlen.

Vom Zählen, und von Bezeichnung der Zahlen, §. 1. f.

Von Vermehrung der Zahlen, §. 13.

Von Verminderung der Zahlen, §. 28.

Anwendung der vier RechnungsArten, §. 52.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vom Zählen, und von Bezeichnung der Zahlen.

§. 1.

Man zählt eins, zweie, dreie, viere, fünfe, sechse, sieben, achte, neune, zehne. Dann fängt man wieder von vorn an, und zwar so, daß zehne immer hinzugesetzt wird: doch hat der Sprach-Gebrauch für einzehn, zweizehn, elfe, zwölfe eingeführt. Hierauf aber geht es regelmäßig: dreizehn, vierzehn, und so fort bis neunzehn.

o o o o o o o o o o	zehn
o o o o o o o o o o	zwanzig
o o o o o o o o o o	dreizig
o o o o o o o o o o	vierzig
o o o o o o o o o o	fünfzig
o o o o o o o o o o	sechszig
o o o o o o o o o o	siebenzig
o o o o o o o o o o	achtzig
o o o o o o o o o o	neunzig
o o o o o o o o o o	hundert

Für zehnzehn, oder zweimal zehn, spricht man zwanzig; für dreimal zehn, dreizig; für viermal zehn, vierzig; und dann funfzig, sechzig, siebzig, achtzig, neunzig. Die ZwischenZahlen aber heißen: ein und zwanzig, zwei und zwanzig, drei und zwanzig ꝛc. bis neun und zwanzig; dann folgt dreizig, ein und dreizig, zwei und dreizig ꝛc. neun und dreizig, vierzig; ein und vierzig, zwei und vierzig ꝛc. neun und vierzig, funfzig; ein und funfzig, u. s w.

Ist man bis neun und neunzig gekommen, so sollte zehnzig folgen; dafür aber sagt man hundert. Hierauf geht es von vorn: Hundert und eins, hundert und zwei ꝛc. bis zwei hundert. Und das geht so fort bis neun hundert neun und neunzig. Dann sollte zehn hundert folgen, wofür man aber tausend zählt.

Tausendmal tausend heißt Million; eine Million Millionen nennt man Billion; eine Million Billionen Trillion; eine Million Trillionen Quadrillion. Dann folgt Quinquillion, oder Quintillion, Sextillion, Septillion. Größere Zahlen kommen nicht leicht vor; und wenn sie vorkommen, heißen sie Octillion, Novillion oder Nonillion, Decillion ꝛc.

§. 2.

§. 2.

Da ich keine Lehrlinge annehme, die nicht schon geläufig aus dem Kopfe zu rechnen wissen; so versteht es sich von selbst, daß sie auch bis tausend, und weiter zu zählen verstehen; und es ist bloß der Vollständigkeit wegen, daß hier von eins an zu zählen gelehrt wird.

§. 3.

Die SprachAehnlichkeit erfodert dreizig, wie man in einigen Ländern Deutschlands, z. B. in Westfalen, wirklich zählt, nicht aber dreissig. Nach eben derselben sollte man auch für zehn einzig, und für zwanzig zweizig sprechen, wenn der allgemeine Gebrauch,

quem penes arbitrium est, et ius, et norma loquendi,

es gestattete. — Meine Gedanken über den Ursprung der Sylbe zig, und überhaupt über die deutschen Zahlen Benennungen, stehen in den Beiträgen zur weitern Ausbildung der deutschen Sprache (Braunschweig, 1795 - 1797) St. IX, S. 138, f.

Die Abweichung der französischen Art zu zählen von der unsrigen, wird weiter unten (§. 10.) gezeigt.

§. 4.

L. Auf eine Tafel werden, von oben herunter, mehrere gleichlaufende Linien von willkührlicher Länge, zwei bis drei Zoll von einander, gezogen:

Zehn Millionen	Million	Hunderttausend	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins

Ueber das erste Fach zur Rechten schreibe man Eins; über das zweite: Zehnmal eins, das ist Zehne; über das dritte: Zehnmal zehn, das ist Hundert; über das vierte: Zehnmal hundert, das ist Tausend; und so fort, über das folgende Fach zur Linken immer zehnmal so viel als über das nächstvorhergehende. — Was wird nun über das fünfte Fach zu stehen kommen?

S. Zehntausend.

L. Und über das sechste?

S. Zehnmal Zehntausend, das ist Hunderttausend.

L. Und wenn man der Fächer mehr hat, über das siebente Million; über das achte zehn Millionen; über das neunte hundert Millionen; über das zehnte tausend Millionen; dann folgen zehntausend Millionen, hunderttausend Millionen; Billion, zehn Billionen, hundert Billionen, u. s. w. wie vom Anfange, nur mit dem Zusatze Billionen. Die Billionen würden dann,

dann, wie die Millionen, sechs Fächer füllen. Was muß dann folgen?

S. Trillionen.

L. Und zwar auch sechs Fächer voll. Dann folgen sechs Fächer mit Quadrillionen, Quinquillionen ꝛc. (§. 1.)

§. 5.

Auf diesem Rechenbrette nun läßt sich jede Zahl, wie groß sie auch sei, durch wenige Zeichen, wozu man Zahlpfennige, Bohnen, oder Striche brauchen kann, sehr bequem und verständlich andeuten, und jede angedeutete eben so leicht aussprechen: man darf nur annehmen, daß jedes Zeichen so viel Einheiten, oder so viel mal eins bedeute, als über dem Fache, worin es liegt, bemerkt ist. So bedeutet z. B. eine Bohne, die ich ins erste Fach zur Rechten lege, eins. Eben diese Bohne aber, in das zweite Fach geschoben, bedeutet zehn, im dritten, hundert, im vierten, tausend, u. s. w. — Was bedeuten nun zwei Bohnen im ersten Fache?

S. Nicht mehr als zweie.

L. Aber im zweiten Fache?

S. Da bedeutet jede zehne; beide zusammen zwanzig.

L. Recht! Und im dritten Fache bedeuten sie zwei hundert; im vierten zwei tausend u. s. w. — Zur Uebung wollen wir nun von eins bis hundert anlegen Eine Zahl aber läßt sich oft auf mehr als eine Art anlegen. Z. B. die Zahl zehn kann ich durch zehn ZahlPfennige im ersten Fache, oder durch einen einzigen im zweiten andeuten. Und eben so ist es mit elfe, zwölfe ꝛc. Auf noch weit mehr Arten läßt die Zahl hundert sich anlegen. Es kann nämlich geschehen durch hundert Zeichen im ersten Fache, oder durch zehn im zweiten, oder durch eins im dritten; oder auch durch zehn im ersten, und neun im zweiten; oder durch zwanzig im ersten, und achtzig im zweiten u. s. w. Die einfachste Art, hundert anzulegen, aber ist?

S. Eins ins dritte Fach zu legen.

L. Recht! Und nun wollen wir anfangen, Zahlen anzulegen, und zwar nach den Regeln der Sparsamkeit, immer jede Zahl mit den möglichwenigsten Zeichen.

Ist dieses von eins bis hundert, oder noch weiter, geschehen; so können nun zur Uebung Zahlen ausser der Ordnung, zum Anlegen, aufgegeben werden. Z. B.

A. Drei hundert, fünf und zwanzig.

B. Fünf tausend, zwei hundert, sechs und dreizig.

C. Sechs Mal hundert (tausend) und fünf und achtzig tausend, drei hundert und vierzig.

D. Drei Millionen, vier Mal hundert und fünf tausend, zwei hundert und neun.

E. Fünf und siebzig Millionen, sechs tausend und sechs.

	Zehn Mill.	Mill.	Hund. Tauf.	Zehn Tauf.	Tauf.	Hund.	Zehne	Eins
A.						ooo	o	ooo o o
B.					ooo o o	o	ooo ooo	ooo ooo
C.			ooo ooo	ooo ooo o	ooo o o	ooo	ooo o	
D.		ooo	ooo o		ooo o	o		ooo ooo ooo
E.	ooo ooo o	ooo oo			ooo ooo			ooo ooo

Eben diese Zahlen können hierauf vom Brette hergelesen werden, und zur Uebung im Aussprechen dienen.

§. 6.

L. Nun wollen wir ein vollständigeres Rechen-Brett, nach einer etwas veränderten Einrichtung, zeichnen. Es soll aus wenigstens vier und zwanzig Fächern bestehen. Die Ueber-Schriften der sechs ersten Fächer zur Rechten sind wie vorhin: Eins, zehn, hundert, tausend, zehn tausend, hundert tausend (§. 4.). Hierauf werden dieselben Ueber-Schriften wiederholt, und das so oft, bis alle Fächer damit angefüllt sind:

Einheiten	Eins	
	Zehne	
	Hundert	
	Tausend	
	Zehntausend	
	Hund.Tauf.	
Millionen	Eins	
	Zehne	
	Hundert	
	Tausend	
	Zehntausend	
	Hund.Tauf.	
Billionen	Eins	
	Zehne	
	Hundert	
	Tausend	
	Zehntausend	
	Hund.Tauf.	
Trillionen	Eins	
	Zehne	
	Hundert	
	Tausend	
	Zehntausend	
	Hund.Tauf.	

Nun ist die Frage: Was bedeutet ein ZahlPfennig z. B. im siebenten Fache?

S. Eine Million.

L. Und im achten?

S. Zehn Millionen.

L. Und im neunten, hundert Millionen; im zehnten, tausend Millionen; im elften zehn tausend Millionen; im zwölften hundert tausend Millionen. Hier hören die Millionen auf. Wir wollen also alle sechs Fächer, vom siebenten bis zum zwölften, Millionen überschreiben. — Welche Bedeutung haben nun die ZahlPfennige der sechs folgenden Klassen?

S. Sie bedeuten Billionen, und zwar ein einzelner des dreizehnten Faches eine Billion; einer des vierzehnten, zehn Billionen, u. s. w.

L. Richtig! Die sechs folgenden Fächer also, vom dreizehnten bis zum achtzehnten erhalten die allgemeine UeberSchrift: Billionen. — Und wie werden nun die sechs folgenden, vom neunzehnten bis zum vier und zwanzigsten zu überschreiben seyn?

S. Trillionen.

L. Auch richtig! Und wären der Fächer noch mehr, so würden nun die zunächstfolgenden sechse Quadrillionen; die darauf folgenden Quinquillionen, Sextillionen ꝛc. zu überschreiben seyn. Die sechs ersten aber sind noch ohne all-

gemeine UeberSchrift, und können allenfalls auch ohne dergleichen bleiben. Gesetzt aber, man wollte ihnen, der Gleichförmigkeit wegen, eine geben, wie würde sie heißen? — Was bedeutet ein Zahl-Pfennig im niedrigsten Fache?

S. Nicht mehr als eins.

L. Und einer im zweiten?

S. Zehne.

L. Und im dritten hundert. Aber nicht Millionen, nicht Billionen, nicht Trillionen; sondern bloße Einheiten. Das ist zu verstehen, ein Zeichen des zweiten Faches bedeutet zehn Einheiten, oder zehn Mal eins; ein Zeichen des dritten, hundert Einheiten, oder hundert Mal eins, u. s. w.; und ein Zeichen des ersten Faches?

S. Bedeutet eine Einheit, oder ein Mal eins.

L. Wie wird also die allgemeine UeberSchrift der sechs ersten oder niedrigsten Fächer lauten?

S. Einheiten.

L. Recht! — Und nun wollen wir, zur Uebung, anlegen: neun Mal hundert und sieben und achtzig tausend sechs hundert und funfzig Trillionen; acht Mal hundert sechs und siebzig tausend, fünf hundert und neun Billionen; sieben Mal hundert und fünf und sechzig tausend und sechs und funfzig Millionen; sechs Mal hundert und sechzig tausend, sechs hundert und sechs (Einheiten).

§. 7.

L. Die bisherigen Exempel, vorzüglich das letzte, sind gewählt, die Beschwerlichkeit des Anlegens großer Zahlen fühlbar zu machen. Sollte es kein Mittel geben, sich die Sache zu erleichtern?

S. Man darf nur zweierlei ZahlPfennige nehmen, und einen größern so viel gelten lassen, als fünf kleinere.

L. Dieser Vorschlag scheint gut, und wir wollen, um ihn zu prüfen, die vorige Zahl (§ 6.) danach anlegen. — Gesetzt aber, es fehlte an ZahlPfennigen, oder andern zum Anlegen schicklichen Zeichen, wie könnte man sich da helfen?

S. Dann könnte man für einen kleinen ZahlPfennig einen Strich, für einen großen ein anderes beliebiges Zeichen, etwan ein V, schreiben.

Trillionen						Billionen						Millionen						Einheiten					
Hund.Tauf.	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins	Hund.Tauf.	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins	Hund.Tauf.	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins	Hund.Tauf.	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins
ooo ooo ooo	ooo ooo o o	ooo ooo o	ooo ooo	ooo o o		ooo ooo o o	ooo ooo o	ooo ooo	ooo oo		ooo ooo ooo	ooo ooo o	ooo ooo	ooo o o		ooo o o	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo		ooo ooo		ooo ooo
o	o	o	o	o		o	o	o	o		o	o	o	o		o	o	o	o		o		o
ooo o	ooo		o			ooo	oo	o			ooo o	oo	o				o	o	o		o		o
VIIII	VIII	VII	VI	V		VIII	VII	VI	V		VIIII	VII	VI	V		V	VI	VI	VI		VI		VI

§. 8.

L. Mit dieser Art, Zahlen beim Rechnen anzudeuten, hat man sich lange beholfen; endlich aber gerieth man auf den Einfall, daß es noch bequemer sei, anstatt zwei Zeichen, neune zu gebrauchen. Man wählte dazu folgende, schon bei den Griechen die Stelle von Zahlen vertretende griechische Buchstaben:

I, ι; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; ϛ; Z, ζ; H, η; Θ, ϑ;

welche nach und nach diese Gestalt annehmen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

eins, zwei, drei, viere, fünfe, sechse, sieben, achte, neune.

Durch diese Erfindung wurde das Zahlen-Schreiben sehr verkürzt; und man sah ein, daß man das Rechen-Brett gänzlich entbehren könne, wenn man zu Bezeichnung der Lücken, oder leeren Stellen, ein zehntes Zeichen erdächte. Dazu nun scheint man Anfangs einen Punkt gebraucht und geschrieben zu haben:

2.3, zwei hundert und dreie;

2..3, zwei tausend und dreie.

Weil man aber den Punkt zu unscheinbar, oder auch zweideutig fand; so verwandelte man ihn in einen Ring, oder Kreis, und schrieb erst $2_{0}3$, 2003; woraus endlich unsere Null wurde: 203, 2003.

Mit diesen Zeichen nun, die man Ziffern nennt, ist es genau wie mit den Zeichen auf dem Rechen-Brette;

Brette: ihr Wert ändert sich mit ihrer Stelle. So wie nämlich drei ZahlPfennige in dem ersten Fache zur Rechten drei Einer, in dem zweiten drei Zehner, in dem dritten drei Hunderter u. s. w. bedeuten (§. 5.); eben so bedeutet die Ziffer 3 in der ersten Stelle zur Rechten drei Einer, in der zweiten drei Zehner, in der dritten drei Hunderter. Und so geht es weiter, und zwar mit allen Ziffern. So oft nämlich eine derselben eine Stelle weiter links gerückt wird, so wird ihr Wert zehnfach erhöht. Wer daher eine Zahl auf dem RechenBrette anzulegen versteht, der weis sie auch mit Ziffern zu schreiben. — Wie muß er dabei verfahren?

S. Er muß die in jedem Fache befindliche Zahl durch eine Ziffer ausdrücken, und das in der Ordnung, wie sie auf dem RechenBrette liegen; die leeren Stellen aber mit Nullen ausfüllen.

L. Recht! — Zur Uebung wollen wir nun die §. 5, 7. aufs RechenBrett gelegten Zahlen mit Ziffern schreiben.

S. §. 5: A = 325
B = 5236
C = 685340
D = 3405209
E = 75006009

§. 7: = 9876508765097650566606.

§. Geschrieben sind sie richtig; um sie aber auszusprechen, oder den Wert jeder einzelnen Ziffer richtig anzugeben, muß man die UeberSchriften des RechenBrettes in Gedanken haben; allenfalls, so lange man sie nicht auswendig weis, das RechenBrett vor sich legen. Auch ist bei Zahlen, die aus mehr als sechs Ziffern bestehn, das Abteilen von der Rechten zur Linken, in Classen zu sechsen, ein grosses Erleichterungs-Mittel des Aussprechens. Man kan dazu ein Komma gebrauchen. Sind der Classen mehr, wie in dem lezten Exempel; so kan man noch überdis die niedrigste Ziffer jeder Classe oberhalb mit einem MerkMal bezeichnen; und zwar die der Millionen mit ', die der Billionen mit '', die der Trillionen mit ''', und so weiter. — Die drei ersten Zahlen (A, B, C) bedürfen keiner Abteilung; die drei lezten aber würden so aussehen:

D = 3,405209

E = 75,006009

§. 7 = 987650''',876509'',765056',660606

[Diese Zahlen werden nun ausgesprochen, und zwar von der Linken gegen die Rechte (§. 5, 6). Zur Uebung kan man sie jedoch auch von der Rechten gegen die Linke lesen lassen.]

§. 9.

Es ist gar nicht ungewöhnlich, Schüler und Erwachsene zu finden, die, ungeachtet mehrjährigen arithmetischen Unterrichts, keine etwas grosse, mit Ziffern geschriebene Zahl, zumal wenn Nullen darin untermengt sind, auszusprechen wissen. Nach meiner Art Unterwiesenen kan das nicht begegnen; und solte es ja bei Anfängern einmal der Fall seyn; so lasse man sie unverzüglich die gegebene Zahl aufs RechenBrett legen, da dann die Schwierigkeiten sofort verschwinden werden. Die BekanntMachung des RechenBretts ist daher nicht bloß Anfängern, sondern selbst des Rechnens Erfahrnen sehr zu empfehlen, um die nicht recht gefassten Gründe der ZahlenSchrift daraus zu lernen, oder auch die wieder vergessenen ins Gedächtniß zurückzurufen.

Es ist aber das RechenBrett eine sehr alte, durch Einführung der Ziffern verdrängte, ja fast in Vergessenheit geratene Erfindung; denn ich habe, aller Nachforschungen ungeachtet, nicht mehr als zwei SchriftSteller des achtzehnten Jahrhunderts gefunden, die den Gebrauch desselben lehrten: nämlich Leupold in seinem theatrum arithmetico-geometricum, und Schmotther in seinem Schreiber und Rechner; und das noch dazu nur unvollständig, indem der Erste die Division, Letzter aber Multiplication und Division, übergeht. Vollständige Anweisung muß man daher nur bei SchriftStellern früherer Jahrhunderte, einem Adam Riese, Kasper Schott, Record, und andern, suchen.

Das von mir angegebene RechenBrett ist übrigens nicht völlig nach dem Zuschnitt des alten, sondern ich habe

habe es, nach Käſtners Vorſchlage (Braunſchweig. Journ. 1788, Aug.) umgeändert, und die Abteilungen, welche ſonſt von unten nach oben zu gehen pflegen, von der Rechten gegen die Linke geordnet, und dadurch das RechenBrett unſerer ZifferSchrift ähnlicher gemacht.

Wir haben bisher von der RechenKunſt der Alten gar keinen Begriff gehabt, weil Nikomachus, Boethius, Pſellus, und Andere, bei denen man Anweiſung dazu ſuchen könte, nicht davon, ſondern von den mancherlei Eigenſchaften der Zahlen, handeln. „Der Griechen Art zu rechnen iſt uns nicht bekant," ſagt daher Büſching in ſeiner GrundLage zu einer Geſchichte der Gelehrſamkeit (S. 87). Und: „Nous ignorons comment les Romains faisoient leurs calculs, ſagt der Abt La Chapelle, in der Encyclop., Artik. caractère. Endlich iſt der HofRat Käſtner ſo glücklich geweſen, dieſe Lükke unſeres Wiſſens auszufüllen, und durch folgende Stelle des Horaz zu beweiſen, daß die Römer ſich des RechenBrettes bedient haben:

— — Pater — — — — — —
Noluit in Flaui ludum me mittere, magni
Quo pueri magnis e centurionibus orti
Laeuo suspensi loculos tabulamque lacerto,
Ibant, octonis referentes idibus aera.
(Hor. serm. I. sat. VI, v. 71 cet.)

welche auf Deutſch ohngefähr lauten würde: „Mein Vater wolte mich nicht in des Flavius LehrStunden ſchikken, in welche Knaben vornehmer Eltern gingen, welche am linken Arm eine Tafel (tabulam), und ein in Fächer abgeteiltes Behältniß (loculos, zu den calculis, oder den RechenSteinchen) trugen, und ihm ſein monatliches SchulGeld brachten." (Man ver-

gleiche Kästners Geschichte der Mathematik, I, 38; — Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, Artik. abaque, vom Abbe' Mallet. — Desgleichen im Berl. Intelligenzblatt N. 35, 36, von 1792 den Aufsatz des Prof. Heynatz: Ueber die ZahlPfennige.)

§. 10.

Die gezehnte, oder dekadische ZählArt ist allen uns bekanten Völkern gemein; und das vermutlich daher, weil die Natur die Menschen lehrte, sich ihrer zehn Finger zum Zählen und Rechnen zu bedienen. Denn notwendig ist diese Art zu zählen nicht; sondern es lassen sich so viel ZählArten angeben, als es Zahlen gibt. Wil man sich RechenBretter für andre dergleichen verfertigen: so wird für die dyadische (mit zwei Zeichen), der Wert des nächstfolgenden Faches immer verdoppelt; für die triadische (mit drei Zeichen), verdreifacht; für die tetradische (mit vier Zeichen), vervierfacht; für die pentadische verfünffacht u. s. w. Wir wollen einen Versuch machen, die Zahlen von 1 bis 20, mit zwei, drei, vier und fünf Zeichen darzustellen.

dyadisch	triadisch	tetradisch	pentadisch	dekadisch
1	1	1	1	1
10	2	2	2	2
11	10	3	3	3
100	11	10	4	4
101	12	11	10	5
110	20	12	11	6
111	21	13	12	7
1000	22	20	13	8
1001	100	21	14	9
1010	101	22	20	10
1011	102	23	21	11
1100	110	30	22	12
1101	111	31	23	13
1110	112	32	24	14
1111	120	33	30	15
10000	121	100	31	16
10001	122	101	32	17
10010	200	102	33	18
10011	201	103	34	19
10100	202	110	40	20

§. 11.

§. 11.

Für Million sprach man ehemals: Tausend Mal tausend; für Billion, tausend, tausend, tausend Mal tausend, u. s. w., welches grosse Zahlen schwer auszusprechen, ja fast ganz unverständlich machte.

Die Franzosen stimmen in der Bedeutung der Wörter Million, Billion, Trillion, nicht nur mit uns, sondern auch unter sich selbst, nicht überein. Alembert, LaChapelle und Bezout z. B. machen die Abteilungen nur von drei Ziffern, und sprechen die drei niedrigsten Abteilungen aus wie wir; die vierte aber, welche uns noch zu den Millionen gehört, bedeutet ihnen schon Billionen; die nächstfolgende fünfte, Trillionen; die sechste Quatrillionen, u. s. f. Nach dieser Abteilung würde das Exempel §. 7. so aussehen: $987^{VI},650^{V},876^{IV},509^{III},765^{II},056^{I},660,606$; und ausgesprochen werden: 987 Sextillionen, 650 Quintillionen, 876 Quatrillionen, 509 Trillionen, 765 Billionen, 56 Millionen, 660 tausend, 606. (Encyclop, Artik. numération u. billion).

LeBlond stimmt in den drei ersten Abteilungen mit den vorigen überein; die vierte aber heisst ihm milliards, die fünfte billiards, die sechste trilliards u. s. w. (L'arithmét. et la géom. de l'officier, t. I, p. 6.)

Deidier dagegen lässt auf die dritte Abteilung, die ihm Millionen bedeutet, drei Abteilungen Milliarden, auf diese drei Abteilungen Billionen; dan drei Abteilungen Trillionen folgen (Arithmét. des géomètres,

tres, t. I, p. 2). — Da diese verschiedenen Zähl-Arten Misverständnisse veranlassen können, so schien mir diese Anzeige davon nicht unnütz.

§. 12.

Fast allgemein werden unsre Ziffern für eine Erfindung der Morgenländer ausgegeben, und zwar vorzüglich aus dem Grunde, weil sie, „wie morgenländische Schrift, von der Rechten gegen die Linke gelesen werden." (Kästners Arithmetik, Cap. 1. §. 14). Allein dieser Grund, oder diese VoraussSetzung ist falsch, denn wir lesen unsere ZahlenSchrift nicht von der Rechten gegen die Linke; sondern, auf gut abendländisch, von der Linken gegen die Rechte (§. 8). Das Gebäude fällt also zusammen, mit dem Grunde, worauf es erbaut ist. — Wie kömt man aber zu der unwahren Behauptung, daß die Zahlen von der Rechten gegen die Linke gelesen werden? Offenbar weil man das Abteilen mit dem Lesen verwechselt (§. 8). Hierauf hat man das Abteilen mit dem Buchstabiren verglichen, und mir eingeworfen, daß, wenn man auch nicht morgenländisch lese, es doch wenigstens nicht zu leugnen sei, daß man morgenländisch buchstabire, das heisst, abteile. (Götting. Anzeigen, 1794, St. 187.) — Angenommen, die Vergleichung passe, so frage ich: Was soll man tuhn? Abendländisch buchstabiren, und morgenländisch lesen? oder morgenländisch buchstabiren, und abendländisch lesen? Und ich denke, niemand werde Anstand nehmen, für das Lezte zu entscheiden. Fragt man aber, woher es komme, daß notwendig eins von beiden, entweder das Lesen oder das Buchstabiren, auf morgen-

ländisch geschehen müsse? so dient zur Antwort: daran ist nicht die morgenländische Schrift Schuld, sondern das den Grund unsrer ZahlenSchrift enthaltende abendländische RechenBrett. Auf demselben ordnete man (um das Wachsen der ZahlZeichen anzudeuten, vielleicht auch, um von oben herab lesen zu können) von unten hinauf. Dieses nun ließ sich beim Schreiben, ohne die größte Unbequemlichkeit nicht nachmachen: denn die Zahl fünf hundert acht und dreizig Millionen, zwei hundert und vierzehn tausend und vier hundert wäre dem zufolge zu stehen gekommen, wie hier unten zu sehen.

5
3
8
2
1
4
4
0
0

Noch unschicklicher wäre es gewesen, wenn man die Ordnung hätte umkehren, und die ZahlZeichen von oben nach unten ordnen wollen; weil man dan von unten nach oben hätte lesen müssen.

0
0
4
4
1
2
8
3
5

Fast

Fast eben so schwierig wäre das Ordnen von der Linken gegen die Rechte

00441²835

gewesen; weil man da, unsrer abendländischen Gewohnheit zuwider, von der Rechten gegen die Linke zu lesen genötigt gewesen wäre. Es blieb also, wenn man nicht über Ekk schreiben wolte, wie die Lilliputer, oder die Damen in England *), nichts übrig, als das unsrer Art zu schreiben und zu lesen angemessenste Ordnen von der Rechten gegen die Linke:

538,214400

Fragt man: Warum man auf dem RechenBrette von der kleinsten Ziffer abzuteilen oder zu ordnen anfängt; so ist das eben so viel, als ob man fragte: Warum man von eins zu zählen anfängt? Auf die Frage aber: Warum man nicht nach eben der Richtung ausspricht, als man ordnet? dient zur Antwort, daß es natürlicher schien, die grössere Zahl vor der kleinern zu nennen, als die kleinere vor der grössern.

So, deucht mich, lässt sich die Entstehung unsrer Zahlen Schrift erklären, ohne nötig zu haben, sie aus dem Morgenlande zu holen. Sie muste so ausfallen, wie sie ist, und wenn kein Morgenland in der Welt gewesen wäre. Was nun die Zahl Zeichen betrifft; so tragen die mehresten derselben, z. B. 4, 6, 7, 8, 9, unverkenbare Spuren ihres griechischen Ursprunges an sich; und ist dieser bei andern weniger in die Augen fal-

*) Travels into several remote nations of the world, by L. Gulliver, part. I, ch. 7.

fallend; so muß man bedenken, daß sie bis zu Einführung der Drukkerei durch mancherlei Verwandlungen gegangen sind, ehe sie ihre jetzige Gestalt erhalten haben. Wer sieht es dem a, dem b, dem d, dem e ꝛc. an, daß sie von A, B, D, E abstammen? Die arabischen Zahl-Zeichen

I, ᚴ, ᚴᚴ, ᚴᚴᚴ, O oder Θ, Ч, V, Λ, Ϙ,

sehen unsern Ziffern weniger ähnlich, als die griechischen: und wo sich einige Aehnlichkeit findet, da ist wahrscheinlicher, daß die Arabier, welche griechische Schriften lasen und übersezten, die ZahlZeichen von den Griechen, als daß wir AbendLänder sie von den Arabiern genommen haben. Auch sind die Arabier, denen wir die Erfindung der Ziffern zuschreiben, sich derselben nicht bewust; sondern schieben diese Ehre den Indiern zu (Encyclopédie, art. caractère); und wer weiß, wen diese wieder damit beehren.

Meine Meinung vom Ursprunge der Ziffern ist übrigens nicht neu. Daſypodius, Hüet, und der HauptMann Siegfrieden haben sie schon vor mir gehabt, jedoch mir unbewust. Meines Erachtens aber gewint eine Hypothese an Wahrscheinlichkeit, wenn Mehre, ohne Einer vom Andern zu wissen, darauf verfallen. Wenn aber H. Siegfrieden in seinen Vermutungen weiter geht, und meint nicht bloß unsre ZahlZeichen, sondern auch unsre ZahlenSchrift sei schon den Griechen bekant gewesen; so trete ich ihm darin nicht bei, und Käſtners Widerlegung desselben (Neue philolog. Bibl. B. III. St. I.) trift mich nicht, ungeachtet man mich darauf verwiesen hat.

Zum

Zum Beschluß wil ich noch einige mir günstige Stellen anführen, zur Prüfung für die, welche Lust und Gelegenheit dazu haben.

1) Dr. Biester liefert einen Auszug aus einem Aufsatz eines englischen Geistlichen, Namens George North, worin dieser, aus dem Theophanes, Paulus Diakonus, und Cedranus, beweist, daß die Arabier, im neunten und zehnten Jahrhunderte, und noch später, in RechnungsSachen, im GegenSatze der Griechen, äusserst unwissend waren; daß im Jahre 700 der Kalife Walid christliche Schreiber und Notarien nahm, weil die Arabier keine Zahlen in ihrer Sprache auszudrükken vermochten. Und unter dem Kaiser Theophilus, der 842 starb, lebte zu Constantinopel ein Gelehrter, Namens Leo, dessen Schüler alle Mathematiker an des Kalifen Almamuns Hofe beschämte. (Berl. Blätter, 1797, Jul. S. 49, 50).

2) Der HauptMann von Archenholz berichtet: Theophanes sage, die Arabier haben die arithmetischen Zeichen der Griechen sich zugeeignet, weil es ihnen an Charakteren zu Bezeichnung aller Zahlen gefehlt habe. Von den Arabiern, setzt H. v. A. hinzu, wurden diese Zeichen entstellt und versezt (Minerva, 1792, März, S. 495). — Hierdurch wird meine ehemals geäusserte Meinung, daß β und γ, ε und ς, verwechselt sein möchten, bestätigt.

3) Im Journal encyclopédique (1783, t. V. p. 445; und 1785, t. VII, p. 24) wird gesagt, die so genanten arabischen Ziffern seien schon den Römern be-

bekant gewesen, die sich ihrer Anfangs zu Bezeichnung von Wörtern, dan von Maß und Gewicht, und endlich von Zahlen, bedient haben, und das seit dem zweiten Jahrhundert. Aus Italien seien diese Zeichen in die Provinzen, und von da zu den Arabiern übergegangen, welche sie aufbewahrt, und bei Wiederauflebung der Wissenschaften uns zurückgegeben haben. Alles dieses soll ausführlicher dargetahn seyn von einem Unaenannten in raccolta d'opuscoli scientifici e filologici del P. Calogera. Venezia, 1753, t. 48; oder, einer andern Stelle zufolge, 1748.

Von

Von Vermehrung der Zahlen.

§. 13.

L. Wie viel machen 3 und 5 zusammen?

S. 3 und 5 sind 8.

L. Aber 4, 3 und 2?

S. 4 und 3 sind 7; und noch 2 dazu sind 9.

L. Das Zusammenzählen, oder Vereinigen zweier oder mehrer Zahlen, heisst Addiren. Das Zeichen der Addition ist ein gerades Kreuz, welches zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt, und mehr, oder und ausgesprochen wird. Z. B. $3+5=8$, heisst: 3 mehr 5, oder 3 und 5 ist gleich 8. Und $4+3+2::?$

S. Heißt: 4 mehr 3, mehr 2 ist gleich 9.

L. Recht! Und die Zahl, welche ausdrükkt, wie viel die addirten zusammen betragen, heisst die Summe. — Auch etwas grössere Zahlen lassen sich noch, ohne Beschwerde, im Kopfe, oder an den Fingern zusammen zählen, z. B. 15 und 3?

S. Machen 18.

L. Und 15 und 13?

S. Machen 28.

L. Und 25 mehr 13?

S. Macht 38.

L. Wir wollen die Zahlen 25 und 13 aufs RechenBrett legen, darunter einen Strich ziehen, und unter diesen Strich die Summe; nämlich in das Fach, welches Eins bezeichnet ist, die Summe der Einer; und in das mit Zehne bezeichnete, die Summe der Zehner, und zwar mit der Abkürzung §. 7. So erhalten wir::?

S. Drei Zehner und acht Einer; zusammen 38.

L. An solchen kleinen Exempeln kan man den Gebrauch des RechenBrettes lernen, das bei grössern erst recht brauchbar wird. Wie viel, z. B., machen 657 und 212 zusammen?

S. 657 + 212 = 869.

L. Und 7410 + 332 + 245?

S. Machen 7987.

Tauf.	Hund.	Zehne	Eins
		II	V
		I	III
		III	VIII
	VI	V	VII
	II	I	II
	VIII	VI	VIIII
VII	IIII	I	
	III	III	II
	II	IIII	V
VII	VIIII	VIII	VII

L.

L. Aber wie viel machen 6 und 4 zusammen?

S. 6 + 4 = 10.

L. Und diese aufs RechenBrett, und zwar auf die einfachste Art, gelegt?

S. Gibt 1 in dem Fache der Zehner (§. 4.).

L. Dieser Fall, daß zehne, oder mehr als zehne, in ein Fach kommen, ereignet sich oft beim Addiren. Was hat man dabei zu beobachten?

S. Für jede Zehne, die in einem Fache sich findet, Eins in das nächste höhere zu legen.

L. Recht! Und um nicht doppelte Mühe zu haben, wird es gut seyn, von der rechten gegen die linke Hand zu addiren. Mit dieser Regel werden wir alle Zahlen zu addiren wissen, wären sie noch so groß, und ihrer noch so viele. Wir wollen mit folgenden den Versuch machen:

A = 49285
B = 392
C = 3576

Diese Zahlen werden aufs Brett gelegt; darunter wird ein Strich gezogen, und unter diesen Strich werden alle Zahlen gelegt, wie sie sich über demselben befinden; doch mit der Abkürzung (§. 7.).

Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehne	Eins	
IIII	VIIII	II	VIII	V	A
		III	VIIII	II	B
	III	V	VII	VI	C
IIII	VVII	VV	VVVVIIII	VVIII	S
V	III	II	V	III	O

So entsteht die Reihe S, welche zwar die Summe enthält, aber nicht gehörig geordnet, oder auf die einfachste Art ausgedrükkt ist. Dieses Ordnen kan in der folgenden Reihe O geschehen (§. 4.) — Welches ist nun die geordnete Summe O?

S. O = 53253; das heisst: 53 tausend 2 hundert und 53.

L. Zum praktischen Gebrauch hat man, wie sich von selbst versteht, diese Weitläuftigkeiten, die Summe anzulegen, und das zwei Mal, gar nicht nötig; sondern man kan, so wie die Zahlen da liegen, sie ordnen; das heisst, wo Zehne liegen, sie wegnehmen, und Eins dafür in das nächste höhere Fach legen.

§. 14.

L. Wer auf dem RechenBrette zu addiren versteht, dem wird das Addiren mit Ziffern nicht schwer. Zum Beispiel, es sollten 25 und 13

addirt

addirt werden; wie würde das zu stehen kommen?

S. 25
13
38

L. Aber 657 und 212?

S. Kommen so zu stehen:

657
212
869

L. Recht. Man schreibt die Ziffern so unter einander, wie sie auf dem RechenBrette liegen; Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w.; zieht dan unter die zu addirenden Zahlen einen Strich, und schreibt unter diesen Strich die Summe. Und nun wollen wir 128 und 262 addiren.

S. 128
262

10 = 8 + 2
80 = 20 + 60
300 = 100 + 200

390 = 128 + 262

L. Es ist richtig: aber die Rechnung kan abgekürzt werden, wenn man den Ueberschuß der einen Classe, nicht hinschreibt, sondern in Gedanken behält, und gleich zur folgenden zählt. So schreibt

man von 8 + 2 = 10 nur die Null hin, und zählt die zurückbehaltene 1 gleich der folgenden Classe zu, die dan 80 + 10 = 90 wird:

128
262

390

Zur Uebung können nun folgende Exempel dienen, die man sich gehörig unter einander schreiben, und dan addiren kan.

A. 9285 + 392 + 3576 = 13253

B. 53856 + 72985 + 86293 + 34263 = 247397

C. 54923 + 8762 + 97528 + 637 + 693414 = 855264

§. 15.

Wer mehr Exempel braucht, wird sie leicht selbst erfinden können. Auch wird es nüzlich seyn, jedes Exempel auf zweierlei Art, nämlich mit Ziffern, und auf dem RechenBrette, auszurechnen. Vornehmlich muß dieses letzte geschehen, sobald es mit Ziffern nicht fort wil. Ueberhaupt ist es eine, hier und in der Folge nicht aus der Acht zu lassende Regel, daß man, sobald sich bei irgend einer Ziffer-Rechnung Schwierigkeiten finden, alsbald seine Zuflucht zum RechenBrette nehme.

Ein

Ein grosses Hülfs-Mittel zur Fertigkeit im Addiren ist, wenn man sich übt, von 1 anzufangen, und immer 2 zuzusetzen: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ꝛc. bis 100. Dan von 2 angefangen, auf eben die Art: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ꝛc. Hierauf fängt man wieder von 1 an, und addirt immer 3: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ꝛc. Dan von 2 angefangen: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ꝛc. Dan von 3 angefangen: 3, 6, 9, 12, 15 ꝛc. Und so fährt man fort, auch 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu addiren, und wechselsweise, von 1, von 2, von 3, von 4 ꝛc. anzufangen.

§. 16.

L. Nun wollen wir einmal zwei gleich grosse Zahlen, 324 und 324, addiren.

S. 324
324

648

L. Und nun eben diese Zahl drei Mal, und vier Mal nehmen.

S. 324
324
324

972

324
324
324
324

1296

L. Wenn die zu addirenden Zahlen alle gleich groß sind, wie in diesen Exempeln; so läßt das Verfahren sich abkürzen. Man schreibt nämlich die Zahl, welche addirt werden soll, nur ein Mal hin, und darunter die Zahl, welche andeutet, wie oft die gegebene sol geschrieben, oder addirt werden. Z. B. 325 solte zwei Mal genommen werden, so wird 324 ein Mal hingeschrieben, und darunter die Zahl 2. Hierauf wird ein Strich gezogen, und unter diesen Strich schreibt man das Zweifache jeder einzelnen Ziffer, aus denen die Zahl 324 zusammengesetzt ist. Nämlich 2 Mal 4 ist 8; 2 Mal 20 ist 40; 2 Mal 300 ist 600. Man sagt aber, für 2 Mal 20 ist 40, der Kürze wegen, lieber 2 Mal 2 ist 4; und anstat 2 Mal 300 ist 600, lieber 2 Mal 3 ist 6: weil, wenn man die Ziffern 4 und 6 nur in ihre rechte Stelle schreibt, sie doch ihre wahre Bedeutung erhalten (§. 7.):

324
2

648

Nun wollen wir, nach eben dieser abgekürzten AdditionsArt, die Zahl 324 auch 3 Mal nehmen.

S. 324 oder kürzer: 324 = F

3 — 3 = f

12 — 972 = P

60

900

972

L. Man nennt diese verkürzte Additions-Art Multiplication. Multipliciren heisst demnach eine gegebene Zahl so oft nehmen, als eine andere gegebene Einheiten hat. Die beiden durch einander multiplicirten Zahlen (F und f) heissen Factoren; die aus dieser Multiplication entstandene Zahl (P) heisst das Product, oder Factum. Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz, welches zwischen die Factoren gesetzt wird. Z. B. $3 \times 4 = 12$ bedeutet: 3 multiplicirt durch 4 ist gleich 12. Andere brauchen, stat des Kreuzes, einen Punkt, und schreiben: $3 . 4 = 12$. Werden die Factoren durch Buchstaben ausgedrükkt, so kan das Muleiplications Zeichen auch ganz wegbleiben: z. B. $a \times b$ kan auch geschrieben werden: ab.

§. 17.

§. 17.

Um mit Fertigkeit zu multipliciren, wird erfodert, daß man alle Producte der ersten neun Zahlen in ein einander auswendig wisse. So lange dieses aber nicht ist, muß man wenigstens eine Tafel bei der Hand haben, welche alle diese Producte enthält, und Ein Mal Eins genannt wird. Man kan sie sich selbst verfertigen, wenn man zuerst das Einfache der neun ersten Zahlen hinschreibt; dan das Zweifache, Dreifache, Vierfache ꝛc. bis Neun- oder Zehnfache derselben, etwa nach folgendem Muster.

1	Mal	1	ist	1	2	Mal	1	ist	2
1	-	2	-	2	2	-	2	-	4
1	-	3	-	3	2	-	3	-	6
1	-	4	-	4	2	-	4	-	8
1	-	5	-	5	2	-	5	-	10
1	-	6	-	6	2	-	6	-	12
1	-	7	-	7	2	-	7	-	14
1	-	8	-	8	2	-	8	-	16
1	-	9	-	9	2	-	9	-	18
1	-	10	-	10	2	-	10	-	20

3	Mal	1	ist	3	6	Mal	1	ist	6
3	-	2	-	6	6	-	2	-	12
3	-	3	-	9	6	-	3	-	18
3	-	4	-	12	6	-	4	-	24
3	-	5	-	15	6	-	5	-	30
3	-	6	-	18	6	-	6	-	36
3	-	7	-	21	6	-	7	-	42
3	-	8	-	24	6	-	8	-	48
3	-	9	-	27	6	-	9	-	54
3	-	10	-	30	6	-	10	-	60
4	Mal	1	ist	4	7	Mal	1	ist	7
4	-	2	-	8	7	-	2	-	14
4	-	3	-	12	7	-	3	-	21
4	-	4	-	16	7	-	4	-	28
4	-	5	-	20	7	-	5	-	35
4	-	6	-	24	7	-	6	-	42
4	-	7	-	28	7	-	7	-	49
4	-	8	-	32	7	-	8	-	56
4	-	9	-	36	7	-	9	-	63
4	-	10	-	40	7	-	10	-	70
5	Mal	1	ist	5	8	Mal	1	ist	8
5	-	2	-	10	8	-	2	-	16
5	-	3	-	15	8	-	3	-	24
5	-	4	-	20	8	-	4	-	32
5	-	5	-	25	8	-	5	-	40
5	-	6	-	30	8	-	6	-	48
5	-	7	-	35	8	-	7	-	56
5	-	8	-	40	8	-	8	-	64
5	-	9	-	45	8	-	9	-	72
5	-	10	-	50	8	-	10	-	80

9	Mal	1	ist	9	10	Mal	1	ist	10
9	-	2	-	18	10	-	2	-	20
9	-	3	-	27	10	-	3	-	30
9	-	4	-	36	10	-	4	-	40
9	-	5	-	45	10	-	5	-	50
9	-	6	-	54	10	-	6	-	60
9	-	7	-	63	10	-	7	-	70
9	-	8	-	72	10	-	8	-	80
9	-	9	-	81	10	-	9	-	90
9	-	10	-	90	10	-	10	-	100

§. 18.

Noch auf andere Art läßt die EinMalEins-Tafel sich verfertigen, wenn man die neun oder zehn ersten Zahlen in eine Reihe schreibt; unter jede Zahl ihr Doppeltes; unter das Doppelte das Dreifache; unter dieses das Vierfache; dan das Fünffache, Sechsfache ꝛc. bis Neunfache: so entsteht folgende Tafel, welche man die pythagorische nennt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Einfach
2	4	6	8	10	12	14	16	18	Doppelt
3	6	9	12	15	18	21	24	27	Dreifach
4	8	12	16	20	24	28	32	36	Vierfach
5	10	15	20	25	30	35	40	45	Fünffach
6	12	18	24	30	36	42	48	54	Sechsfach
7	14	21	28	35	42	49	56	63	Siebenfach
8	16	24	32	40	48	56	64	72	Achtfach
9	18	27	36	45	54	63	72	81	Neunfach

In dieser Tafel stehen auf zwei der äussern Ränder die ersten neun Zahlen einfach. Wil man nun das Product zweier derselben, z. B. das von 6 Mal 7, wissen; so sucht man die eine dieser Zahlen auf einem, die andere auf dem andern Rande, auf; fährt darauf mit einem Finger von der obenstehenden 6 gerade herab, mit dem andern aber, von der auf dem SeitenRande stehenden 7 gerade seitwärts; so findet man in dem Fache, wo beide Finger zusammen treffen, das gesuchte Product 42. Diese Beschwerlichkeit des Aufsuchens macht die pythagorische Tafel minder bequem, als die vorige (§. 17.).

§. 19.

L. Um sich von dem Nutzen des EinMalEins zu überzeugen, und zugleich zu Erlangung grösserer

Fertig-

Fertigkeit im Multipliciren, können folgende Exempel dienen:

987654321 × 2 = 1975308642
— × 3 = 2962962963
— × 4 = 3950617284
— × 5 = 4938271605
— × 6 = 5925925926
— × 7 = 6913580247
— × 8 = 7901234568
— × 9 = 8888888889
5060708090 × 9 = 45546372810
123456789 × 2 = 246913578
— × 3 = 370370367
— × 4 = 493827156
— × 5 = 617283945
— × 6 = 740740734
— × 7 = 864197523
— × 8 = 987654312
— × 9 = 1111111101

§. 20.

L. Was ist mehr, 2 Mal 3, oder 3 Mal 2?
S. Es ist gleich viel. 2 Mal 3 ist 6, und 3 Mal 2 ist auch 6.
L. Aber 3 Mal 4, und 4 Mal 3?

S.

S. 3 Mal 4 ist 12, und 4 Mal 3 ist 12; ist auch gleich viel.

L. Wissenschaftlich ausgedrükkt heisst dis: Zwei Factoren geben einerlei Product, man mag den ersten durch den zweiten, oder den zweiten durch den ersten, multipliciren:

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

Oder allgemein ausgedrükkt:

$$a \times b = b \times a$$

Dieses wissen wir nur bloß praktisch. Um uns auch aus Gründen davon zu überzeugen, wollen wir eine Reihe von 4 ZahlPfennigen 3 Mal unter einander legen; so stellt eine wagerechte Reihe AB, CD oder EF den einen Factor (4), eine scheitelrechte AC, GH, IK, BD, den andern (3); das Ganze ACDB aber das Produkt vor.

G I
A o o o o B
E o o o o F
C o o o o D
H K

Dieses wollen wir nun einmal wagerecht, nach der Ordnung AB + EF + CD überzählen: Wie viel gibt das?

S. AB + EF + CD = 4 + 4 + 4 = 12.

L. Und nun scheitelrecht: AC + GH + IK + BD?

S. AC + CH + IK + BD = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.

L. Die erste ZählArt war, 4 drei Mal genommen, oder 4 × 3 = 12: die zweite war, 3 vier Mal genommen, oder 3 × 4 = 12. Auch wird das Resultat immer das selbige seyn, man mag Zahlen nehmen, welche man wil. Wie lautet es?

S. Zwei Factoren geben einerlei Product, man mag den ersten durch den zweiten, oder den zweiten durch den ersten multipliciren.

L. In eine allgemeine Formel gekleidet, sieht dis so aus:

$$a \times b = b \times a;$$

oder kürzer: ab = ba.

Es erhellt hieraus, daß die EinMalEins-Tafel um die Hälfte abgekürzt werden könte, weil jedes Product zwei Mal darin vorkömt; nämlich 1 Mal 2, und 2 Mal 1; 2 Mal 3, und 3 Mal 2, u. s. w.; es hat aber so, wie es da steht, auch seinen Nutzen.

§. 21.

L. Wie ist es aber mit drei Factoren? Z. B. mit 2 × 3 × 4? Ist da auch die Ordnung willkührlich?

S.

E. $2 \times 3 = 3 \times 2$
$3 \times 4 = 4 \times 3$
$2 \times 4 = 4 \times 2$ } (§. 19.)

$2 \times 3 \times 4 = 3 \times 2 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 =$
$4 \times 3 \times 2 = 4 \times 2 \times 3 = 2 \times 4 \times 3$

L. Wenn man anstat der Zahlen Buchstaben setzt, so wird der Beweis, weil ein Buchstab jede Zahl bedeutet, und man bei ihnen die MultiplicationsZeichen sparen kan, kürzer, und doch allgemein:

$ab = ba$
$bc = cb$
$ac = ca$

$abc = bac = bca = cba = cab = acb$

Wie ist es aber mit vier Factoren? Mit $2 \times 3 \times 4 \times 5$? Oder mit $a \times b \times c \times d$?

S. Da von dreien schon erwiesen ist, daß ihre Ordnung willkührlich ist; so kan ich, wenn ich drei Factoren für einen annehme, den vierten allen obigen Producten, vorn oder hinten ansetzen: $dabc = abcd = dbac = bacd = dbca = bcad = dcba = cbad = dcab = cabd = dacb = acbd$. Dan kan man wieder zwei und zweie versetzen (§. 20.); so erhält man $dabc = adbc = adcb = dacb$ ꝛc.

L. Und eben so läßt sich von fünf, sechs, sieben ꝛc. Factoren beweisen, daß auch bei ihnen die

Ord-

Ordnung willkührlich ist. Man kan also als ausgemacht und erwiesen annehmen::

S. Die Ordnung der Factoren ist willkührlich.

L. Oder: Einerlei Factoren geben, in veränderter Ordnung, einerlei Producte.

§. 22.

L. Wie oft ist in dem Product ABDC (§. 20) der eine Factor AB enthalten?

S. Drei Mal.

L. Gerade so viel Mal, als in dem andern Factor AC Eins enthalten ist. — Und wie oft stekkt dieser zweite Factor AC in dem Producte?

S. So oft als Eins in AB, das ist, vier Mal.

L. Da dieses der Fall bei allen Producten ist, so wollen wir uns, zu künftigem Gebrauch, merken: Jeder Factor stekkt so oft in dem Producte, als die Einheit in dem andern.

§. 23.

L. Wir wollen die Zahl Fünfe aufs Rechen-Brett legen. — Wenn diese nun verzehnfacht, das

das ist, zehn Mal so groß gemacht werden solte, wie könte das am kürzesten geschehn?

S. Man müste sie ein Fach weiter links rükken (§. 4.).

L. Recht! Und jeder in der Fünfe enthaltene Einer bedeutet nun nicht mehr eins, sondern zehne, und die Fünfe selbst ist nun verwandelt::?

S. In zehn Mal fünfe, das ist funfzig.

L. Nun wollen wir, anstat der Fünfe, 25 anlegen. — Wie wird man diese verzehnfachen?

S. Ich muß die 2 und die 5 jede ein Fach weiter links rükken.

L. Recht! Und gesetzt, man hätte die Zahl 325, oder 4325 zu verzehnfachen; oder, welches einerlei ist, durch 10 zu multipliciren: was wäre zu tuhn?

S. Jede Ziffer, aus denen sie besteht, eine Stelle weiter links zu rükken.

L. Gesetzt aber, eine Zahl 25 solte hundertfach genommen, durch 100 multiplicirt werden?

S. Dan müste ich jede einzelne Ziffer zwei Fächer links rükken; so daß die 5 ins Fach der Hunderte, die 2 ins Fach der Tausende, kömt.

L. Und wenn eben diese Zahl 25 durch 1000 multiplicirt werden solte?

S. So müste man jede Ziffer drei Stellen weiter links rükken.

L. Alles richtig! Es könnt jezt darauf an, das auf dem RechenBrett Geschehene auch mit Ziffern zu bewerkstelligen. Wie wird, z. B., 25, mit Ziffern geschrieben, durch 10 multiplicirt?

S. Man muß eine Null dran setzen: 250 (§. 7.).

L. Und eben diese 25 durch 100?

S. $25 \times 100 = 2500$.

L. Also $25 \times 10 = 250$

$25 \times 100 = 2500$

$25 \times 1000 = 25000$

$32 \times 10 = 320$

u. s. w.

Hieraus ergibt sich die allgemeine Multiplications-Regel, wenn der eine Factor 10, 100, 1000 ꝛc. ist. Was hat man zu tuhn?

S. Dem andern Faktor die Nullen desselben anzuhängen.

§. 24.

L. Also $23 \times 10 = 230$: wie wird aber 32 durch 20 multiplicirt?

S. Dan muß ich erst zehnfach, und dan zweifach, nehmen.

L. Und wenn es durch 30 solte multiplicirt werden?

S.

S. So nähme ich es erst zehnfach, und dan dreifach.

L. Recht! Und wir wollen auf dem Rechenbrette, und mit Ziffern, versuchen, 32 durch 20, 30, 40 ꝛc. zu multipliciren.

S. $32 \times 10 = 320$; $320 \times 2 = 640$; $320 \times 3 = 960$; $320 \times 4 = 1280$ ꝛc.

L. Gut! Aber läßt das Verfahren sich nicht abkürzen? Warum muß erst durch 10, und dan durch 2 ꝛc. multiplicirt werden? Kan das nicht zugleich geschehn?

S. O ja, man kan gleich mit einem Mal das Doppelte, Dreifache ꝛc. in ein höheres Fach tragen.

L. Recht! Und auf ähnliche Art wird auch durch 200, 300 ꝛc.; 2000, 3000 ꝛc.; u. s. w. multiplicirt. Zur Uebung wollen wir nun eine grössere Zahl, 132, durch 200, durch 300, durch 400 ꝛc. multipliciren.

S. 132	132	132
200	300	400
26400	39600	52800

L. Und 432 durch 2000, durch 3000 ꝛc.!

S. 432	432	432
2000	3000	4000
864000	1296000	1728000

L. Und nun 4320 durch 2000, 3000 ꝛc.!

S. 4320	4320	4320
2000	3000	4000
8640000	12960000	17280000

L. Die RechenMeister pflegen solche Exempel so zu ordnen:

432	4320	4320
2000	2 000	3 000
864000	8640000	12960000

Das Resultat ist das nämliche; nur bei der ersten VerfahrungsArt pflegen Anfänger leicht zu irren.

UebungsExempel

432 × 50 = 21600
432 × 500 = 216000
4320 × 50 = 216000
4320 × 60 = 259200
4320 × 70 = 302400
4320 × 80 = 345600
4320 × 90 = 388800
4320 × 900 = 3888000
43200 × 900 = 38880000
8790 × 60 = 527400
8790 × 6000 = 52740000

§. 25.

L. Wenn 24 durch 12 zu multipliciren wäre, wie könte das wol geschehn?

S. Ich kan jede einzelne Ziffer der Zahl 24 durch 12 multipliciren: das gibt

$$4 \times 12 = 48 \quad (\S.\ 15.)$$
$$20 \times 12 = 240 \quad (\S.\ 23.)$$

$$(4 + 20) \times 12 = 288 = 48 + 240$$

Ich kan auch die ganze Zahl 24 durch jede einzelne Ziffer der Zahl 12 multipliciren:

$$24 \times 2 = 48$$
$$24 \times 10 = 240$$

$$24 \times (2 + 10) = 288 = 48 + 240$$

L. Dieses lezte Verfahren ist vorzuziehn, wie wir in der Folge erkennen werden: und man pflegt es so zu setzen:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 12 \\ \hline 48 = 24 \times 2 \\ 240 = 24 \times 10 \\ \hline 288 = 24 \times (2 + 10) = 24 \times 12 \end{array}$$

Nun ein grösseres Exempel: 224×32!

S. 224
32
448 = 224 × 2
6720 = 224 × 30
7168 = 448 + 6720

L. Und nun 224 durch 132!

S. 224
132
448 = 224 × 2
6720 = 224 × 30
22400 = 224 × 100
29568 = 448 + 6720 + 22400

L. Nun a) 635 × 237
und b) 2635 × 345
c) 2635 × 305

S. a) 635
237
4445 = 635 × 7
19050 = 635 × 30
127000 = 635 × 200
150495 = 635 × 237

b)

b) 2635
345
13175 = 2635 × 5
105400 = 2635 × 40
790500 = 2635 × 300
909075 = 2634 × 345

c) 2635
305
13175 = 2635 × 5
790500 = 2635 × 300
803675 = 2635 × 305

L. Die Nullen am Ende der Producte dienen nur zu Ausfüllung lerer Plätze, und man kan sie sich daher ersparen, wenn man nur die geltenden Ziffern an ihre rechte Stelle setzt; das heisst, unter der Ziffer, mit welcher man multiplicirt, zu schreiben anfängt, und dan gegen die linke Hand fortfährt. Die Exempel seben dan so aus:

a) 635	b) 2635	c) 2635
237	345	305
4445	13175	13175
1905	10540	7905
1270	7905	803675
150495	909075	

Uebungs Exempel:

A 1234 × 205 = 252970
B 98765 × 60045 = 5930344425
C 896745 × 108090 = 96929167050
D 98765432 × 700430 = 69168270535760

§. 26.

Man muß nicht versäumen, wenigstens einige Exempel der beiden vorigen Paragraphen auch auf dem RechenBrette zu multiplicirren. Besondere Anweisung dazu wäre nicht nur zu weitläuftig, sondern auch unnütz. Uebung ist der beste LehrMeister.

§. 27.

L. Addiren ist zusammenfügen, oder hinzutuhn (§. 13.): also auch Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches (Geom. §. 36.); und Ungleiches zu Gleichem addirt, gibt Ungleiches (G. §. 38.). Desgleichen Grösseres zu Grösserm addirt, gibt Grösseres, als Kleineres zu Kleinerem addirt. Aber gelten diese Sätze auch von der Multiplication? Zum Beispiel, gibt Gleiches durch Gleiches multiplicirt, auch Gleiches?

S. Multiplication ist, verkürzte Addition (§. 16.); also muß allerdings auch von ihr wahr seyn, was von der Addition wahr ist.

L. Recht! Gleiche Grössen durch gleiche Grössen multipliciren, ist eben so viel als gleiche Grössen gleich viel Mal addiren. Also Gleiches durch Gleiches multiplicirt, gibt Gleiches. Eben so ist es auch klar, daß Gleiches durch Ungleiches multiplicirt, Ungleiches; und Grösseres durch Grösseres multiplicirt, Grösseres geben müsse, als Kleineres durch Kleineres.

Von

Von Verminderung der Zahlen.

§. 28.

L. Von achten dreie weggenommen, wie viel bleiben?

S. Fünfe.

L. Dieses Wegnehmen einer Zahl von einer andern, heisst abziehn, oder subtrahiren. Das Zeichen der Subtraction ist ein wagerechter Strich, welcher zwischen beide Zahlen gesetzt, und minder, oder weniger ausgesprochen wird. Z. B. 8 — 3 = 5, heisst: 8 weniger 3 ist gleich 5. Die durch die Subtraction gefundene Zahl (5) heisst der Unterschied beider Zahlen, oder der Ueberschuß der einen (8) über die andere (3); oder auch der Rest. Zum Abziehn kleiner Zahlen bedarf es eben so wenig künstlicher Anstalten, als zum Addiren derselben, wie wir an 8 — 5 gesehn haben: gesetzt aber, es solten von 48 abgezogen werden 23, so kan das nicht Jeder im Kopfe bewerkstelligen; und wenn er es könte, so wird es ihm doch auf dem RechenBrette, oder mit Ziffern, leichter. — Wie wird auf dem RechenBrette zu verfahren seyn?

S. Ich lege erst 48 an, und darunter 23, hierauf nehme ich von der obern Zahl (48) so

viel

viel weg, als drunter liegt (23). Was liegen bleibt (25), ist der Ueberschuß.

Zehne	Eins
IIIII	VIIII
II	III

L. Das Verfahren ist richtig. Besser aber wird es seyn, die abzuziehende Zahl nicht vom Brette wegzunehmen, sondern nur abzusondern; weil so ein Irtum leichter einzusehn und zu berichtigen ist. — Das Verfahren mit Ziffern ist eben so leicht. Man schreibt die Zahlen unter einander, wie sie auf dem RechenBrette liegen, zieht dan unter beide einen Strich, und unter diesen Strich schreibt man den Ueberschuß 25, der gefunden wird, wenn man jede Ziffer der abzuziehenden Zahl von der darüber stehenden wegnimmt:

48
23

25

Dabei ist es gut, sich zu gewöhnen, von der Rechten gegen die Linke zu subtrahiren; weil man sonst, wie wir in der Folge sehn werden, sich

zuweilen doppelte Arbeit macht. Um den dekadischen Wert der Ziffern braucht man sich während der Arbeit nicht zu bekümmern, wenn man nur jede an die ihr gebührende Stelle schreibt, und sagt: drei Einer von acht Einern, bleiben fünf Einer, und zwei Zehner von vier Zehnern, bleiben zwei Zehner, das ist 25.

UebungsExempel.

A. 368 — 45 = 323
B. 7658 — 5048 = 2610
C. 78436 — 65215 = 13221
D. 567890 — 56780 = 511110
E. 98765432 — 25432100 = 73333332

Die Exempel A, B u. C kommen so zu stehn:

A. 368	B. 7658	C. 78436
45	5048	65215
323	2610	13221

§. 29.

L. Nun wollen wir aufs RechenBrett legen 628; und in einiger Entfernung darunter, so daß eine Reihe dazwischen Raum habe, 52. Wenn man nun diese 52 von der darüber liegen-

den

den Zahl, 628, subtrahirt, wie viel bleibt übrig?

S. 2 von 8 bleibt 6; aber 5 von 2 läßt sich nicht abziehn.

Hundert	Zehne	Eins
VI	II	VIII
	V	II

L. 52 ist doch weniger als 628, und muß sich also davon abziehn lassen; das heisst, es muß einen Ueberschuß geben. Solte der sich gar nicht ausfinden lassen?

S. O ja, ich darf nur 628 Striche hinschreiben, und 52 davon ausstreichen.

L. Die Rechnung wäre zwar richtig, aber erstaunend weitläuftig. Läßt sich gar keine Abkürzung ersinnen? Eine Zahl läßt sich ja auf mehrerlei Art anlegen (§. 5.); solte sich die Zahl 628 nicht so legen lassen, daß ins Fach der Zehner mehr käme, und der Abzug geschehn könte?

S. Ja, ich muß eins aus dem Fache der Hunderter ins Fach der Zehner versetzen, so gilt es da Zehne (§. 5), und ich habe nun in diesem Fache, anstat 2 Zehner, 12 Zehner. Streiche ich

da-

davon nun 5 aus, so bleiben 7. Und da in dem Fache der Hunderter nur 5 übrig sind; so ist der ganze Ueberschuß 576.

Hundert	Zehne	Eins	
VI	II	VIII	628
V	XVII	VIII	628
	V	II	52
V	VII	VI	576

L. Recht! Wie wird aber nun eben diese Subtraction mit Ziffern geschehn?

S. Wie auf dem RechenBrette.

Von 628 = 600 + 20 + 8
= 500 + 120 + 8
abgezogen 52 = 50 + 2
bleibt 500 + 70 + 6 = 576

L. Auch richtig, aber zu weitläuftig. In der Ausübung verfährt man so: Man schreibt beide Zahlen ohne ZwischenRaum unter einander, zieht unter beide einen Strich, und unter diesen Strich schreibt man den Ueberschuß, von der Rechten gegen die Linke. Kömt man an Ziffern, wo der Abzug nicht geschehn kan, weil die Ziffer, von der er geschehn solte, zu klein ist; so vermindert man die nächste Ziffer zur Linken um eins, und be-

bemerkt diese Verminderung durch einen Punkt seitwärts über der Ziffer; die andere Ziffer, welche zu klein war, ist dadurch um 10 vermehrt, und der Abzug kan nun ohne Hinderniß geschehn:

6'28
52
576

Und nun wissen wir auch zu subtrahiren, wenn die Ziffer, von welcher der Abzug geschehn soll, zu klein ist.

UebungsExempel.

A. 8456 — 2384 = 6072
B. 8456 — 2584 = 5872
C. 8456 — 7587 = 869
D. 567890 — 8225 = 559665

§. 30.

L. Noch ein andrer Fall kan sich ereignen. Wir wollen aufs RechenBrett legen 502
und in einiger Entfernung darunter 45
Wie wird hier der Abzug geschehn? Das Fach, aus welchem gehohlt, oder geborgt werden solte, ist ler.

S. Ich muß ein Fach weiter gehn.

L. Gut! Aber wie viel gilt eins aus dem dritten Fache?

S. Hundert.

L. Das ist weit mehr als wir brauchen, und in dem Fache der Einer unterzubringen im Stande sind.

S. Ich muß unterweges abladen; das heisst, die Hundert ins Fach der Zehner tragen; neun Zehner daselbst lassen, und einen weiter, ins Einer-Fach bringen.

L. So ist es recht. Nun haben wir im EinerFache 12, im ZehnerFache 9, im Hunderts-Fache 4, und der Abzug kan ohne Schwierigkeit geschehn. — Wie groß ist nun der Rest, oder Ueberschuß?

S. 502 — 45 = 457.

Hundert	Zehne	Eins
V		II
IIII	VV	II
IIII	VIIII	VVII
	IIII	V
IIII	V	VII

L. Wie wird nun dieses Exempel mit Ziffern gerechnet?

S. Ich sage 5 von 2 geht nicht; borge 1 von der 5. welche 500 bedeutet; so bleiben dort 400, und die 0 wird in 10 verwandelt:

5'02
45

Nun hohle ich 1 von diesen 10 weg; so werden die 10 zu 9, und die 2 zu 12. Nun spreche ich 5 von 12 bleibt 7; 4 von 9 bleibt 5; und 4 bleibt 4.

L. Ganz recht! Wir wollen uns ein für alle Mal merken: Eine Zahl, von welcher man borgt, wird mit einem Punkt bezeichnet; und eine Null, über welche man weg borgt, wird zur Neune. — Wie aber, wenn der Nullen mehr als zweie sind? Wenn, z. B., von 5002 solten 145 abgezogen werden?

S. So müste ich über alle Nullen wegborgen, und das Geborgte zuerst in die nächste Stelle zur Rechten tragen, wodurch diese erste Null zur 10 wird: dan von diesen 10 wieder eins in die nächstfolgende Stelle versetzen. Und das so fort, bis an die Ziffer, welche zu klein ist; so ist die Ziffer, von welcher ich geborgt habe, um 1 vermindert, die aber, welche zu klein war, um 10 vermehrt, und

alle

alle zwischen beiden befindliche Nullen sind in Neunen verwandelt worden:

5'002
145
4857

L. Recht! Und es gilt als allgemeine Regel: Alle Nullen, über welche weg geborgt wird, werden zu Neunen; wie auf dem RechenBrette sich ganz deutlich zeigen läßt.

UebungsExempel.

A. 35003 — 3945 = 31058
B. 35000 — 5945 = 29055
C. 7800206 — 623208 = 7176998

§. 31.

L. $\underline{5 + 3 = 8}$ (§. 13.)

$5 = 8 - 3$)
und $3 = 8 - 5$) (G. §. 37.).

Eben dieses mit allgemeinen Zeichen:

$\underline{a + b = s}$

$a = s - b$
$b = s - a$

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. Von der Summe zweier Zahlen (s) eine der addirten (b) abgezogen, gibt die andre (a).

L. Man kan auch noch daraus lernen: Addition und Subtraction stehn einander entgegen, oder heben einander auf, und dienen einander zur Probe. Hätte ich, z. B., von 725 + 856 die Summe gefunden, und wolte die Richtigkeit der Rechnung prüfen, wie könte das geschehn?

S. Ich müste von 1581 eine der addirten Zahlen abziehn, und sehn, ob die andre übrig bliebe.

L. Und ich hätte 1581 — 725 = 856 gefunden, wie würde ich die Richtigkeit dieses Unterschiedes prüfen?

S. Durch Addition der Zahlen 725 und 856.

§. 32.

L. Ihr werdet euch noch erinnern, daß es eine abgekürzte Addition gibt, welche man Multiplication nennt. Wo findet die Stat?

S. Wan einerlei Zahl mehr Male zu addiren ist (§. 16.).

L. Gleiche Bewandniß hat es mit der Subtraction. Wenn ich z. B. wissen wolte, wie oft eine Zahl d = 4 in einer andern D = 12 enthalten ist, wie würde ich das erfahren?

D d

* * * * * * * *

* * * * Q

* * * * * * * *

S. Ich müste d so oft von D abziehn, als ich könte. Hier geht das drei Mal an.

L. Bei dieser Verrichtung nun findet eine Abkürzung Stat, welche man Division nennt. Dividiren heisst also::?

S. Untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl d in einer andern gegebenen D enthalten ist.

L. Und dieses kan auf zweierlei Art geschehn; nämlich durch wiederholte Subtraction, oder durch Teilung in lauter Haufen von der Grösse des Divisors, welches man, im engern Verstande, Division nennt. Die Zahl d, welche dividirt, heisst der Divisor; die Zahl D, welche dividirt wird, der Dividendus; und die Zahl Q, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, heisst der Quotient. — Das DivisionsZeichen ist ein DoppelPunkt, welcher zwischen den Dividendus

dendus und den Divisor gesetzt wird. Z. B.
12 : 4 = 3 wird ausgesprochen: :?

S. 12 dividirt durch 4 ist gleich 3.

L. Und D : d = Q : :?

S. D dividirt durch d, ist gleich Q.

§. 33.

L. Um also zu erfahren, wie oft d in D enthalten sei, ist nicht eben nötig, d von D wegzunehmen. Man kan alles liegen lassen, und doch erfahren, wie oft d in D stekkt. Wie ist das zu machen?

S. Man muß D in Haufen, oder Reihen, jede von der Grösse d, ordnen, und diese zählen (§. 32.).

L. Recht! Und für jede Reihe von der Grösse d, welche D enthält, kömt 1 in Q.
Durch Zeichen wird dieses so angedeutet:

Q : 1 = D : d.

Welches man aussprechen kan: 1 lässt sich von Q so oft wegnehmen, als d von D. Oder auch: die Einheit stekkt so oft im Quotienten: :?

S. Als der Divisor im Dividendus.

L. Aber nun ist die Frage: Wie oft stekkt Q in D?

S. Vier Mal.

L. So oft also als Eins in d. Wie wird dis durch Zeichen ausgedrükkt?

S. D : Q = d : 1.

L. Und in Worte gekleidet?

S. Der Quotient stekkt so oft im Dividendus, als die Einheit im Divisor.

L. Wenn ich also den Dividendus durch den Quotienten dividire, was erhalte ich da?

S. Den Divisor.

L. Also der Dividendus durch den Divisor dividirt, gibt den Quotienten; und der Dividendus, durch den Quotienten dividirt, gibt den Divisor.

§. 34.

L. Ich möchte gern wissen, wie oft die Zahl 3 in der Zahl 36 stekkt: wie erfahre ich das?

S. Wir müssen untersuchen, wie oft sich 3 von 36 wegnehmen, oder auch, in wie viel Reihen von der Grösse 3, die Zahl 36 sich ordnen lässt (§. 32, 33.). Sie gibt solcher Reihen 12.

L. Also 36 : 3 = 12. Wenn nun 3 Menschen 36 Aepfel, Groschen, oder sonst etwas, unter sich teilen solten, wie viel würde jeder davon erhalten?

S.

S. So viel als Reihen sind. Von jeder Reihe bekömt jeder eins: also überhaupt 12.

L. Das gibt eine neue Ansicht der Division. Dividiren nämlich heisst teilen. Eine Zahl D also durch eine andre d dividiren::?

S. Heisst, sie in so viel gleiche Teile zerlegen, als d Einheiten enthält.

L. Recht! der Dividendus ist die zu teilende Zahl; der Divisor, oder Teiler zeigt an, in wie viel gleiche Teile der Dividendus sol zerlegt werden; — und der Quotient::?

S. Zeigt, wie groß jeder einzelne Teil wird; wie viel auf jede Einheit des Divisors fält.

§. 35.

L. Nun wollen wir beide Zahlen aufs Rechen-Brett legen: den Divisor, 3, oben; den Dividendus, 36, drunter. Das sind 6 Einer, und 3 Zehner, unter 3 Personen zu verteilen. Wie viel bekömt nun jeder von den Einern?

S. Zweie.

L. Und von den Zehnern?

S. Einen.

L. Auf Jedes Anteil also kommen zwei Einer und ein Zehner, das ist $10 + 2 = 12$. Die Zahl der Reihen, in welche der Dividendus durch

den

den Divisor geteilt wird, gibt den Quotienten, den wir, mehrer Deutlichkeit wegen, unter einem Strich bemerken wollen. — Nun wollen wir auch 936 durch 3 dividiren. Wie viel wird dan auf jeden Einzelnen fallen?

S. 3 Hunderter, 1 Zehner, und 2 Einer; das ist 312.

Hund.	Zehne	Eins	
		III	d
	III	III	D
		III	
	I	II	Q
		III	d
III	III	III	D
III		III	
III			
III	I	II	Q

L. Das war das Verfahren in dem Fall, wenn der Dividendus jedes Faches sich ohne Ueberschuß in Reihen von der Grösse des Divisors ordnen lässt.

Uebungs-

Uebungs-Exempel.

A. 4826 : 2 = 2413
B. 36096 : 3 = 12032
C. 80480 : 4 = 20120

§. 36.

L. Nun wollen wir einmal 54 durch 2 dividiren, und zwar zuerst im Kopfe, oder durch Striche, ohne Rechen-Brett.

S. Der Quotient ist 27.

L. Und nun auf dem Rechen-Brette.

S. Die Zahl 5 lässt sich nicht gerade auf teilen.

L. Das ist nicht gut. Wie werden wir's denn nun machen?

S. Ich muß den Ueberschuß, den einen Zehner, ins Fach der Einer tragen, wo er zehne gilt.

L. Recht.

S. Nun habe ich, in dem Einer-Fache 14, die geben sieben Reihen; und in dem Fache der Zehner behalte ich nur 4, die zwei Reihen machen.

L. Und wie groß ist nun der Quotient? Oder wie viel vom Dividendus kömt auf jede Einheit des Divisors?

S. 2 Zehner und 7 Einer, das ist 20 + 7 = 27.

Zehne	Eins	
	II	d
V	IIII	D
II	II	
II	II	
(I)	II	
	II	D
	II	
	II	
	II	
II	VII	Q

L. Nun wissen wir also auch Zahlen zu dividiren, wo nicht jede Ziffer des Dividendus sich in Reihen von der Grösse des Divisors ordnen lässt.

Exempel A.

Hundert	Zehne	Eins
		III
III	III	III
III	III	III
	(II)	III
		III
		III
		III
		III
		III
II	II	VIII

Uebungs-

Uebungs-Exempel.

A. 684 : 3 = 228
B. 944 : 4 = 236
C. 8885 : 5 = 1777
D. 8886 : 6 = 1481
E. 7539 : 7 = 1077
F. 1032 : 8 = 129
G. 78543 : 9 = 8727
H. 1672 : 8 = 209
I. 16072 : 8 = 2009

§. 37.

L. Nun wollen wir auch einen Versuch machen mit Ziffern, oder mit der Feder, zu dividiren. Zuerst 936 durch 3. Zuerst wollen wir das Exempel auf dem RechenBrette rechnen, damit wir die UebereinStimmung beider RechnungsArten deutlich sehn, und die Rechnung mit Ziffern uns leichter werde.

Hundert	Zehne	Eins	
		III	d
III	III	III	D
III		III	
III			
III	I	II	Q

S. Der Quotient ist 312.

L. Nun auch mit Ziffern. Den Divisor kan man hinter den Dividendus, mit dem Divisions-Zeichen zwischen beide:

$$936 : 3 = Q$$

wenn es dazu an Raum fehlt, über den Dividendus, setzen, wie in dem nachstehenden Exempel:

(3)

936 | 312
9.. = 3 × 3

03.
3. = 1 × 3

06
6 = 2 × 3

0

Nun dividire ich jede einzelne Ziffer des Dividendus durch den Divisor, und fange bei der höchsten, der 9, an, und spreche: „3 in 9 ist 3 Mal enthalten," schreibe diese 3 in den Quotienten, dessen höchste Stelle zur Linken sie einnimt; multiplicire sie durch den Divisor, schreibe das Product 9 unter die erste Ziffer des Dividendus, und ziehe sie davon ab. Zu dem, was übrig bleibt, welches hier 0 ist, rükke ich die nächstfolgende Ziffer des Dividendus, die 3, herunter, und dividire sie durch den Divisor; so erhalte ich die zweite Ziffer des Quotienten, welche 1 ist. Diese 1 multiplicire ich wieder durch den Divisor, schreibe das Product, 3, unter

unter die heruntergerükkte 3, und ziehe sie davon ab. Zu dem Reste 0 hole ich die nächstfolgende Ziffer, 6, herunter, dividire sie, wie vorhin, und erhalte 2, als die dritte Ziffer des Quotienten, die ich wieder durch den Divisor multiplicire ($2 \times 3 = 6$), darauf das Product, 6, unter die zuletzt heruntergerükkte Ziffer schreibe, und es davon abziehe. So ist die Division vollbracht, und der vollständige Quotient ist 312, so wie wir ihn auf dem RechenBrette gefunden haben. — Nach diesem Muster wollen wir nun auch die UebungsExempel §. 35. dividiren.

(2)		(3)	
S. A.	4826 | 2413	B.	36096 | 12032
	$4.. = 2 \times 2$		3....
	8..		6
	$8.. = 4 \times 2$		6...
	2.		09.
	$2. = 1 \times 2$		9.
	6		6
	$6 = 3 \times 2$		6
	0		0

(4)
C. 80480 | 20120
8 . . .
———
04..
4..
———
8.
8.
———
0

§. 38.

L. Nun wollen wir auch Zahlen dividiren, wo nicht jede Ziffer des Dividendus sich gerade auf durch den Divisor teilen lässt. Das erste mag seyn 684 : 3. Zuerst wieder auf dem RechenBrette.

S. (Diese Rechnung steht schon §. 36.).

L. Und nun mit Ziffern.

S. 684 : 3 = 228
6.. = 2 × 3
———
8.
6. = 2 × 3
———
24
24 = 8 × 3
———
0

(Und

(Und nun können, zur Uebung, alle Exempel §. 36. durch dividirt werden. Hier stehn drei derselben.)

(4)

B. 944 | 236

8..

14.

12.

24

24

0

(5)

C. 8885 | 1777

5...

38..

35..

38.

35.

35

35

0

(8)

F. 1032 | 129

8..

23.

16.

72

72

0

§. 39.

L. Um Raum und Zeit zu ersparen, kan man die Producte auch in Gedanken behalten, und den Abzug verrichten. Die Rechnung sieht dan so aus:

(3)		(4)		(5)	
684	228	944	236	8885	1777
8		14		38	
24		24		38	
0		0		35	
				0	

§. 40.

L. Bisher haben wir mit lauter einziffrigen Divisoren dividirt; jetzt wollen wir es einmal mit einem zweiziffrigen versuchen, und 1488 durch 12 dividiren.

S 1488 : 12 = 124

12..=1×12

28.

24.=2×12

48

48=4×12

0

L. Und nun 308 durch 22.

S. 308 : 22 = 14
22. = 1 × 22
88
88 = 4 × 22
0

Uebungs-Exempel.

A. 330 : 15 = 22
B. 330 : 22 = 15
C. 3564 : 11 = 324
D. 1968 : 16 = 132
E. 5750 : 25 = 230

§. 41.

L. Die vorigen Exempel waren leicht. Ist aber der Divisor etwas groß; so fält dem Ungeübten die Beurteilung, wie oft er in einigen Ziffern des Dividendus stekkt, zuweilen schwer. Wir wollen, um uns davon zu überzeugen, einmal 8575 durch 35 dividiren.

S. 8575 : 35 = 245
70.. = 35 × 2
157.
140. = 35 × 4
175
175 = 35 × 5
0

L. Zur Not ging dis noch: aber je grösser Divisor und Dividendus werden, je schwerer wird es. Hier ist indessen ein Erleichterungs-Mittel. Man multiplicirt den Divisor durch alle Zahlen von 1 bis 9, und macht sich folgende Producten-Tafel:

35 × 1 = 35
" × 2 = 70
" × 3 = 105
" × 4 = 140
" × 5 = 175
" × 6 = 210
" × 7 = 245
" × 8 = 280
" × 9 = 315

Nun haben wir ein für den Divisor 35 eingerichtetes EinMalEins, dessen Gebrauch in die Augen fält. Z. B. wie oft stekkt 35 in 105?

S. 3 Mal.

L. Und in 245?

S. 7 Mal.

L. Aber in 85?

S. Oefter als 2 Mal, und weniger als 3 Mal.

L. Und in 157?

S. Oefter als 4, und weniger als 5 Mal.

L. Das ist genug. Nun kennen wir den Gebrauch dieser Tafel, und wollen obiges Exempel, mit Hülfe derselben, dividiren.

S. (Hier das vorige Exempel).

L. Wir hätten zu diesem Exempel nicht einmal die ganze Tafel gebraucht; da sie aber einmal gemacht ist, so wollen wir noch ein Exempel durch eben den Divisor dividiren: 258475 : 35.

S. 258475 : 35 = 7385

245...

134..

105..

297.

280.

175

175

0

Uebungs-Exempel

A. 252970 : 205 = 1234
B. 9876543050 : 725 = 13622818
C. 46013258 20 : 4732 = 972385
D. 5930344425 : 60045 = 98765
E. 969291670 50 : 108090 = 896745
F. 80002 : 26 = 3077
G. 73048291 : 67 = 1090273
H. 16419648 : 456 = 36008

§. 42.

L. Bei grossen Exempeln sind solche Producten-Tafeln (§. 40.) vorteilhaft; bei kleinen lohnen sie der Mühe nicht. Es ist daher ratsam, sie nicht für alle neun Zahlen auf ein Mal, sondern nur nach und nach, so wie man die Producte braucht, zu verfertigen; indem man oft mit der Hälfte derselben, ja mit noch wenigern, auskömt, wie das Exempel A (§. 41.) zeigt. Oder man muß lernen die Producten-Tafel ganz entbehren: und das geht sehr gut an. Um uns davon zu überzeugen, wollen wir das Exempel 258475 : 35 (§. 40.) noch ein Mal rechnen. —

(35)

```
258475 | 8743985
280...
245...
 134..
 140..
 105..
  297.
  315.
  280.
  175
  175
    0
```

Gleich Anfangs habe ich zu untersuchen, wie oft 35 in 258 stekkt. Da diese Zahlen zu groß sind, um sich durch das EinMalEins beurteilen zu lassen, so lasse ich von jeder die lezte Ziffer weg, und untersuche nur, wie oft 3 in 25 stekkt. Das EinMalEins sagt mir : : ?

S. Acht Mal: denn 3 Mal 8 ist 24.

L. Recht! Wir schreiben also 8 in den Quotienten. Da ich aber die zu vergleichenden Zahlen 35 und 258 nicht ganz, sondern nur 3 und 25 dafür genommen habe: so kan auch das Resultat meiner Vergleichung, die 8 des Quotienten, unrichtig seyn. Wie entdekte ich das?

S. Durch Multiplication der gefundenen Zahl 8 durch den ganzen Divisor: 8 × 35 = 280: welches Product grösser ist als 258.

L. Recht! Ich streiche also die 8 weg, und setze die nächste kleinere Zahl 7 dafür. — Und nun weiter!

S. Sage 7 × 35 = 245; 258 — 245 = 13; hohle die nächstfolgende Ziffer, 4, herunter; spreche 3 in 13, 4 Mal; schreibe die 4 in den Quotienten; 4 × 35 = 140. Da nun 140 wiederum grösser ist als 134, so streiche ich die 4 im Quotienten weg, und setze 3 dafür. 3 × 35 = 105; 134 — 105 = 29. Zu diesen 29 die nächstfolgende Ziffer 7 herunter, gibt 297. 3 in 29 gibt 9 in den Quotienten; 9 × 35 = 315. Diese Zahl lässt sich wieder von der darüberstehenden 297 nicht abziehn: ich streiche daher die 9 wieder weg, und schreibe 8 dafür. 8 × 35 = 280; 297 — 280 = 17; zu diesen 17 die 5 herunter, gibt 175; in 17 steckt 3 5 Mal; 5 × 35 = 175; 175 — 175 = 0.

L. So ist es richtig, und wir haben den vollständigen Quotienten 7385 wie vorhin (§. 41.). Die Regel des Verfahrens ist, nur mit der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste Ziffer der zu dividirenden Zahl, oder wo dieses nicht geht, in die zwei höchsten, zu dividiren; das Product aus dem gefundenem Quotienten und dem ganzen Divisor

mit

mit der dividirten Zahl zu vergleichen; und wenn letzte kleiner ist, den Quotienten zu vermindern, so lange, bis die abzuziehende Zahl der, von welcher der Abzug geschehn soll, entweder gleich ist, oder kleiner ist als sie. — Als

Uebungs Exempel

können hier die des vorigen Paragraphs (40.) dienen.

§. 43.

L. Eine Zahl, 12, durch eine andre, 3, dividiren, heisst::?

S. Untersuchen, wie oft 3 in 12 enthalten ist (§. 32.); oder auch sie in 3 gleiche Teile zerlegen (§. 34.).

L. Aber eine Zahl, 4, durch eine andre, 3, multipl:ciren::?

S. Heisst, sie dreifach nehmen (§. 16.).

L. Eine Zahl also durch 3 multipliciren heisst also, sie dreifach nehmen, und sie durch 3 dividiren, heisst den dritten Teil von ihr finden. Multiplication und Division also stehn einander entgegen, wie Addition und Subtraction; heben einander auf, und dienen einander zur Probe, wie diese (§. 30.).

$$12 : 3 = 4$$
$$4 \times 3 = 12$$

Oder durch allgemeine Zeichen:

$$D : d = Q \quad (\S.\ 32.)$$
$$Q \times d = D$$

Was heißt das?

S. Der Dividendus durch den Divisor dividirt, gibt den Quotienten (§. 33.); und der Quotient durch den Divisor multiplicirt, gibt den Dividendus.

L. Man kan also den Dividendus als ein Product aus dem Divisor und dem Quotienten ansehn:

$$D = d \times Q$$

§. 44.

L. $D : d = Q$)
und $D : Q = d$) (§. 33.)

Wenn man nun D als ein Product aus d mit Q betrachtet (§. 43.); und dem zufolge diese Zeichen in Worte überträgt, so lauten sie: :?

S. Ein Product (D) durch den einen Factor (d oder Q) dividirt, gibt den andern (Q oder d).

§. 45.

§. 45.

L. Wenn 25 durch 10 multiplicirt wird, was gibt das zum Product?

S. $25 \times 10 = 250$ (§. 23.).

L. Und 25 durch 100?

S. $25 \times 100 = 2500$ (§. 23.).

L. Dieses, verglichen mit §. 44, gibt eine Abkürzung der Division an die Hand. Wie wird z. B. 250 durch 10 am kürzesten dividirt?

S. Wenn ich die Null wegstreiche.

$250 : 10 = 25$ (§. 44.).

L. Und 2500 durch 100 dividirt?

S. Gibt auch 25.

L. Aber 25000 durch 10 dividirt?

S. Gibt 2500; denn $2500 \times 10 = 25000$ (§. 23.).

L. Die AbkürzungsRegel also, wenn der Divisor eine 1 mit Nullen hat, und der Dividendus auch mit Nullen schliesst::?

S. Ist, vom Dividendus und vom Divisor gleich viel Nullen am Ende wegzustreichen (§. 90.).

UebungsExempel:

A. $320 : 10 = 32$

B. $3200 : 100 = 32$

C. $32000 : 100 = 320$

D. $32000 : 10 = 3200$

§. 46.

L. 6 : 2 = 3
8 : 2 = 4
Was gibt aber 7 : 2?

S. Da fält der Quotient zwischen 3 und 4.

L. Es bleibt 1 übrig, oder ungeteilt. 3 ist also nicht der vollständige Quotient; 4 dagegen ist zu groß dazu. Man muß daher, um den Quotienten vollständig zu bezeichnen, so schreiben:

$$7 : 2 = 3 + (1 : 2)$$

Was gibt nun 10 : 3?

S. $10 : 3 = 3 + (1 : 3)$

L. Und 14 : 4?

S. $14 : 4 = 3 + (2 : 4)$

L. Die übrig bleibenden Zahlen (in den beiden ersten Exempeln, 1; in dem lezten, 2) heissen Reste, und zwar DivisionsReste, zum Unterschiede von den SubtractionsResten (§. 28.). — Was bedeutet es, was wil ich wissen, wan ich 7 durch 2 dividire?

S. Wie oft 2 in 7 stekkt (§. 32); oder auch, wenn Zweie sich in 7 teilen, wie viel Jeder erhält. (§. 34.).

S. Und wie viel erhält Jeder?

S. Dreie, und noch ein Halbes.

L. Dieses Halbe ist das 1 : 2. — Und wenn dreie sich in 10 teilen, wie viel erhält da ein Jeder?

S. Dreie, und von Einem noch den dritten Teil.

L. Dieser dritte Teil ist 1 : 3. — Und von 14 unter viere geteilt, erhält ein Jeder : :?

S. 3 + (2 : 4); das ist drei Ganze, und von zweien noch den vierten Teil.

L. Recht. Und der vierte Teil von Zweien, ist eben so viel, als von Einem der zweite Teil, oder die Hälfte. Es ist folglich 2 : 4 = 1 : 2.

Dieses ist ein vorläufiger Begriff von den DivisionsResten. In der Folge werden wir weiter davon sprechen. Sie können mit dem Divisor wachsen, dürfen aber nie grösser werden als dieser.

UebungsExempel.

A. 7657 : 37 = 206 + (35 : 37)
B. 8923694 : 52 = 171609 + (26 : 52)
C. 52168007 : 326 = 160024 + (183 : 326)
D. 123456 : 10 = 12345 + (6 : 10)
E. 123456 : 100 = 1234 + (56 : 100)
F. 123456 : 1000 = 123 + (456 : 1000)
G. 123456 : 20 = 6172 + (16 : 20)
H. 123456 : 200 = 617 + (56 : 200)
I. 123456 : 2000 = 61 + (1456 : 2000)
K. 123456 : 3000 = 41 + (456 : 3000)
L. 8738534 : 4800 = 1820 + (2534 : 4800)

§. 47.

L. Der Division dient die Multiplication zur Probe. Wie ist das zu verstehn?

S. Wenn ich den Quotienten durch den Divisor multiplicire, muß der Dividendus wieder erscheinen (§ 43).

L. Und hiervon die Anwendung auf das Exempel A (§. 46.)

S. $206 \times 37 = 7622$.

L. Und der wahre Dividendus ist 7657. — Woran liegt es, daß der hier nicht erscheint?

S. Ich habe den Rest 35 nicht addirt.

$7622 + 35 = 7657$.

L. Recht! Bei der DivisionsProbe muß man nicht vergessen, zum Producte den etwanigen Rest zu addiren.

§. 48.

L. Die Exempel D, E, F ꝛc. bis ans Ende (§. 46.) sind wohlbedächtig gewählt, um noch auf eine Abkürzung der Division aufmerksam zu machen. Endet, nämlich, der Divisor mit Nullen; so kan man für jede Null desselben eine Ziffer des Dividendus von der Rechten gegen die Linke, abschneiden, und in den Rest setzen: Das, was vom Divi-

den-

dendus noch übrig ist, wird nun nicht durch den ganzen Divisor, sondern nur durch dessen geltende Ziffern, dividirt. Das da etwan UebrigBleibende macht, mit dem für die Nullen Abgeschnittenen zusammen, den Rest aus.

UebungsExempel.

A. 1234 : 10 = 123 + (4 : 10)
B. 1234 : 100 = 12 + (34 : 100)
C. 1234 : 20 = 61 + (14 : 20)
L. 1234 : 200 = 6 + (34 : 200)

Hier können die Exempel des 46sten Paragraphs, von D an, folgen, und auch nach dieser Abkürzung dividirt werden.

§. 49.

L. Das Dividiren auf dem RechenBrette mit mehrziffrigem Divisor habe ich übergangen, weil ich es als Vorlebung zur Division auf dem Papier nicht nötig hielt. Der Vollständigkeit wegen, und zu Befriedigung der Wißbegierigen, wil ich indessen einige Exempel hieher setzen, und dabei vorläufig erinnern, daß, so oft der Divisor um eine Ziffer wächst, auch ein neues Zeichen notwendig wird, wenn die Rechnung nicht ungeheuer weitläuftig werden soll. Ist der Divisor, z. B., zweiziffrig, so verkürzt das Zeichen X = VV die Arbeit schon um die Hälfte, wie nachstehendes Exempel A, 8575 : 35 = 245, zeigt.

A.

A.

Tausend	Hundert	Zehne	Eins
		III	V
VIII	V	VII	V
	XXXV	XXXV	XXXV
	XXXV	XXXV	XXXV
	(XV)	XXXV	XXXV
		XXXV	XXXV
		(XVII)	XXXV
	II	IIII	V

Ist der Divisor dreiziffrig, so wird schon ein viertes Zeichen, welches die Stelle von XXXXXXXXXX vertrit, und C seyn kan, fast unentbehrlich, wie aus dem Exempel B, 7872 : 328 = 24, zu ersehn.

B.

Tausend	Hundert	Zehne	Eins
	III	II	VIII
VII	VIII	VII	II
		CCCXXVIII	CCCXXVIII
		CCCXXVIII	CCCXXVIII
		(CXXXI)	CCCXXVIII
			CCCXXVIII
		II	IIII

Ein vierziffriger Divisor erfodert ein fünftes Zeichen, welches CCCCCCCCCC vertrit, und CIↃ, m, oder M seyn kan. Und so geht es weiter.

Geht man wieder zurükk, auf Exempel, mit zwei-, drei-, vier- ꝛc. ziffrigen Divisoren, die aber in eben so vielen AnfangsZiffern des Dividendus nicht ganz enthalten sind,

wie 4940 : 76 = 65,
28390 : 835 = 34,
258475 : 7385 = 35;

so fühlt man das Bedürfniß von MittelZeichen, welche die Stelle von XXXXX, von CCCCC ꝛc. vertreten, und wozu man L, und D brauchen kan. Das nachstehende Exempel C, 4940 : 76 = 65 kan zur Probe dienen.

C.

Tausend	Hundert	Zehne	Eins
		VII	VI
IIII	VIIII	IIII	
		LXXVI	LXXVI
		LXXVI	LXXVI
		LXXVI	LXXVI
		LXXVI	LXXVI
		LXXVI	LXXVI
		LXXVI	
		(XXXVIII)	
		VI	V

§. 50.

Es läſſt ſich hieraus erklären, warum die Griechen und Römer nur zu den Zahlen I, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 ꝛc. einfache ZahlZeichen hatten, und zu allen dazwiſchen fallenden ſich zuſammengeſetzter bedienten *).

Da wir uns der römiſchen Zeichen bedient haben; ſo wird es nicht ganz auſſer unſerm Wege ſeyn, wenn ich hier eine Erklärung derſelben gebe.

Für eins iſt I das natürlichſte Zeichen; und C und M, oder wie man ehemals ſchrieb, CIↃ, ſind die Anfangsbuchſtaben von centum, hundert, und mille, tauſend.

V iſt der AnfangsBuchſtabe von vinve, wie man ehemals für quinque geſprochen hat, wie aus einer Stelle des Quinctilian (L. I. c. 4. §. 9), und dem deutſchen fünfe wahrſcheinlich wird.

X iſt ein doppeltes V, und alſo das natürliche Zeichen für zehne.

Wenn man von L, und CIↃ, die Hälfte wegnimmt; ſo bleibt L, und IↃ, übrig, von denen das erſte ein halbes Hundert, das iſt 50, das zweite ein halbes Tauſend, das iſt 500, bedeutet. In der Folge iſt IↃ in D verwandelt worden.

---

*) Die Griechen hatten bekantlich zweierlei BezeichnungsArten für die Zahlen; die eine, §. 8, deren ſie ſich zum Schreiben, und die andre

I, Π, Δ, ⌈Δ⌉, H, ⌈H⌉, X ꝛc.

deren ſie ſich zum Rechnen bedienten. Von dieſer lezten BezeichnungsArt iſt hier die Rede. In Anſehung meiner Hypotheſe treffe ich mit dem Prof Voigt zuſammen. Man ſehe deſſen Grundlehren der reinen Mathematik; Arithm. §. 21.

Diese mir sehr wahrscheinliche Erklärung verdanke ich dem nun verstorbenen Professor Meyen zu Stettin. Andre Erklärungen des D findet man in der Berliner MonatsSchrift (JG. 1783, Nov.); und im teutschen Merkur, (JG. 1784, März S. 227); aller ZahlZeichen aber in des HM von Archenholz Minerva (JG. 1792, März). Was Goguet, Montücla, Heilbronner, Donsdorf, und das hannöverische Magazin (JG. 1765, S. 1159) darüber sagen. habe ich nicht gelesen.

§. 51.

L. Von der Subtraction und Division gilt auch, was von der Addition und Multiplication gelehrt ist (§. 27). Nämlich: Gleiches von Gleichem subtrahirt, und Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches, Aber von Ungleichem Gleiches abgezogen::?

S. Gibt Ungleiches.

L. Und Ungleiches durch Gleiches dividirt::?

S. Gibt auch Ungleiches.

L. Und von Gleichem Ungleiches abgezogen, oder Gleiches durch Ungleiches dividirt::?

S. Gibt auch Ungleiches.

Von

Anwendung der vier RechnungsArten.

I. Reduction, oder Verwandlung.

§. 52.

L. Ein Taler hält 24 GuteGroschen *); wie viel GuteGroschen gehn nun auf 2 Taler?

S. 2 Mal 24, das ist 48.

L. Und auf 3 Taler?

S. 3 Mal 24, das ist 72.

UebungsExempel.

4	Taler	=	24	×	4	ggr.	=	96 ggr.
5	"	=	(24	×	5)	"	=	120 "
6	"	=	(24	×	6)	"	=	144 "
7	"	=	(24	×	7)	"	=	168 "
8	"	=	(24	×	8)	"	=	192 "
9	"	=	(24	×	9)	"	=	216 "
10	"	=	(24	×	10)	"	=	240 "
11	"	=	(24	×	11)	"	=	264 "
12	"	=	(24	×	12)	"	=	288 "
20	"	=	(24	×	20)	"	=	480 "

24

*) Ich unterscheide GuteGroschen und gute Groschen, weil wirklich nicht jeder GuteGroschen ein guter Groschen ist.

24	Taler	= (24 ×	24)	ggr.	=	576 ggr.
25	»	= (24 ×	25)	»	=	600 »
50	»	= (24 ×	50)	»	=	1200 »
100	»	= (24 ×	100)	»	=	2400 »
150	»	= (24 ×	150)	»	=	3600 »
200	»	= (24 ×	200)	»	=	4800 »
500	»	= (24 ×	500)	»	=	12000 »
678	»	= (24 ×	678)	»	=	16272 »
1000	»	= (24 ×	1000)	»	=	24000 »

§. 53.

L. Ein GuterGroschen hält 12 Pfennige; wie viel Pfennige sind nun in 2 GutenGroschen enthalten?

S. 2 Mal 12, das ist 24.

L. Und in 3 GutenGroschen?

S. 3 Mal 12, das ist 36.

UebungsExempel.

4	ggr.	= (12 ×	4)	Pf.	=	48 Pf.
5	»	= (12 ×	5)	»	=	60 »
6	»	= (12 ×	6)	»	=	72 »
7	»	= (12 ×	7)	»	=	84 »
8	»	= (12 ×	8)	»	=	96 »
9	»	= (12 ×	9)	»	=	108 »
10	»	= (12 ×	10)	»	=	120 »

Bayerische Staatsbibliothek München

11 ggr. = (12 × 11) Pf. = 132 Pf.
12 " = (12 × 12) " = 144 "
16 " = (12 × 16) " = 192 "
20 " = (12 × 20) " = 240 "
24 " = (12 × 24) " = 288 "

§. 54.

L. Wie viel Pfennige hält nun ein Taler?
S. Ein Taler hält 24 GuteGroschen (§. 52), die 288 Pfennige machen (§. 53).
L. Und 2 Taler? wie viel Pfennige halten die?
S. 2 Taler = 288 × 2 = 576 Pf.

UebungsExempel.

3 Taler	=	288	×	3	= 864 Pf.
4 "	=	288	×	4	= 1152 "
5 "	=	288	×	5	= 1440 "
6 "	=	288	×	6	= 1728 "
10 "	=	288	×	10	= 2880 "
12 "	=	288	×	12	= 3456 "
16 "	=	288	×	16	= 4608 "
20 "	=	288	×	20	= 5760 "
25 "	=	288	×	25	= 7200 "
50 "	=	288	×	50	= 14400 "
100 "	=	288	×	100	= 28800 "
500 "	=	288	×	500	= 144000 "
789 "	=	288	×	789	= 227232 "
1000 "	=	288	×	1000	= 288000 "

L. Zu merken ist, daß man die Zahl der Pfennige, welche in einer Zahl Taler stekken, auf zweierlei Art herausbringt: zuerst, wie hier geschehn, durch Multiplication der Taler durch 288; und dan zweitens::?

S. Wenn man die Taler erst durch Multiplication mit 24 zu Groschen, und die Groschen, durch Multiplication mit 12, zu Pfennigen macht.

Uebungs Exempel.

3 Tl. × 24 = 72 ggr. = (72 × 12) Pf. = 864 Pf.
4 : × 24 = 96 : = (96 × 12) : = 1152 :

u. s. w.

§. 55.

L. Aber 15 Taler, 12 Gute Groschen und 10 Pfennige, wie viel Pfennige machen die?

S. 15 Rtlr. 12 ggr. 10 Pf.

24
60
30
360 ggr. = 15 Rtlr.
12
372 ggr. = 15 Rtlr. + 12 ggr.
12
744
372
4464 Pf. = 15 Rtlr. + 12 ggr.
10 Pf.
4474 Pf. = 15 Rtlr. + 12 ggr. + 10 Pf.

Uebungs-Exempel.

25	Rtlr.	16	ggr.	6	Pf.	= 7398 Pf.
150	"	8	"	9	"	= 43305 "
678	"	18	"	4	"	= 195484 "
5694	"	20	"	0	"	= 1640112 "
5694	"	0	"	7	"	= 1639879 "

§. 34.

L. Ein Taler hält 30 Kaiser-Groschen oder Bömen; ein Kaiser-Groschen hält 3 Kreuzer: wie viel Kreuzer gehn auf den Taler?

S.

S. 30 × 3 = 90.

L. Und 17 Taler, 20 KaiserGroschen und 2 Kreuzer; wie viel Kreuzer machen die zusammen?

S. 17 Tl. 20 Kgr. 2 Xer.

30

510 Kgr.
20

530 Kgr.
3

1590)
2) Xer

1592 Xer = 17 Tl. 20 Kgr. 2 Xer.

UebungsExempel.

25 Tl. 12 Kgr. 1 Xer = 2287 Xer
250 " 15 " 2 " = 22547 "

L. Mit dieser in Schlesien und SüdDeutschland üblichen MünzAbteilung stimmt die in Ost- und Westpreussen gebräuchliche überein; wobei zu merken ist, daß die KaiserGroschen daselbst Dütchen, und die Kreuzer Groschen heissen; und der Groschen wieder in drei Schillinge geteilt wird. — Wie viel preussische Schillinge hält nun ein Taler?

S. 1 Tl. = 30 Dütch. = 90 pr.gr. = 270 Schill.

L.

L. Und 10 Taler halten : : ?

S. 10 Tl. = 300 Dütch. = 900 prgr. = 2700 Schill.

§. 57.

L. In Kleve, und der Grafschaft Mark gilt der Taler 60 Stüber, der Stüber 2 FettMännchen, das FettMännchen 2 Bösse oder Füchse: wie viel FettMännchen, und Füchse gehn nun auf den Taler?

S. 1 Tl. = 60 St. = 120 FM. = 240 Füchse.

L. Und auf 12 Taler?

S. 12 Tl. = 720 St. = 1440 FM. = 2880 B.

§. 58.

In einigen Ländern des westfälischen und niedersächsischen Kreises gelten MarienGroschen, deren 36 auf den Taler gehn. Wie viel Marien-Groschen machen nun 3 Taler?

S. 3 Tl. = 3 × 36 Mgr. = 108 Mgr.

L. Und 10 Taler : : ?

S. 10 Tl. = 36 × 10 Mgr. = 360 Mgr.

L. Pfennige hält ein MarienGroschen 8. Wie viel Pfennige machen nun 512 Taler, 24 Marien-Groschen und 6 Pfennige?

S. 512 Tl. = (512 × 36) Mgr. = 18432 Mgr. (18432 + 24) Mgr. = 18456 Mgr. = (18456 × 8) Pf. = 147648 Pf. Dazu noch die 6 Pf., macht 147654 Pf.

§. 59.

L. Dieses sind die gangbarsten SilberMünzen, nicht nur der preussischen Staten, sondern auch Deutschlandes. Nun wollen wir uns auch mit Maß und Gewichte bekant machen. —

Ein Zentner hält 110 Pfund;
ein Pfund 32 Lot;
ein Lot 4 Quentchen:
wie viel Lot und Quentchen gehn nun auf den Zentner?

S. 1 Zentner = 110 Pfund.
110 Pfund × 32 = 3520 Lot;
3520 Lot × 4 = 14080 Quentchen.

L. Und 38 Zentner, 108 Pfund, wie viel Pfunde betragen die?

S. 4288 Pfund.

L. 25 Zentner, 60 Pf. 24 Lot 2 Quentch. wie viel machen die Quentchen zusammen?

S. 359778 Quentchen.

§. 60.

L. Ein Winspel, oder Wispel, hält 24 Scheff.
ein Scheffel 4 Virtel;
ein Virtel 4 Metzen:
wie viel Metzen gehn auf den Wispel?

S. 1 W. = 24 Sch. = × 4 V. = 96 V.
= 96 × 4 M. = 384 Metzen.

L. 27 Wispel, 15 Scheffel, 8 Metzen, wie viel Metzen machen die?

S. 10616 Metzen.

L. Und 36 Wispel und 14 Metzen?

S. Machen 13838 Metzen.

§. 61.

L. Eine gemeine rheinländische Rute hält 12 Schuh, oder Fuß,
ein Schuh hält 12 Zoll;
ein Zoll hält 12 Strich:
wie viel Zoll und Strich hält eine Rute?

S. 1 R. = 12 Sch. = 12 × 12 Z. =
144 Z. = 144 × 12 Str. = 1728 Strich.

L. Der Umfang der Erde ist 360 Grad;
jeder Grad des Aequators hält 15 geographische Meilen;

jede

jede geograph. Meile hält 1970 rheinländ. Ruten, und 2 Schuh:
wie viel Meilen, Schuh und Zoll hält der Aequator, oder der gröste Umfang der Erde?

S. (360 × 15) Meilen = 5400 Meilen;
5400 M. × (1970 R. + 2 Sch.) = (5400 × 23642) Sch. = 127,666800 Sch. = (127,666800 × 12) Z. = 1532,001600 Z.

L. Es ist hierbei zu merken, daß diese Berechnung des ErdUmfanges nur ohngefähr zutrift, indem die Länge eines ErdGrades, von welchem die Länge der geographischen Meilen abhängt, noch nicht genau bestimmt ist.

§. 62.

L. Ein Tag hat 24 Stunden;
eine Stunde 60 Minuten;
eine Minute 60 Secunden:
wie viel Secunden machen 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, und 48 Secunden?

S. 365 × 24 = 8760 Stunden.
8760 + 5 = 8765 Stunden.
8765 × 60 = 525900 Minuten.
525900 + 48 = 525948 Minuten.
525948 × 60 = 31556880 Secunden.
37556880 + 48 = 31556928 Secunden.

L.

Dieses ist die Länge eines SonnenJahres; jedoch nur die ohngefähre; denn zur völligen Gewisheit und UebereinStimmung sind die Sternkundigen darin noch nicht gekommen: doch beträgt der Unterschied nur Secunden. — Ein gemeines bürgerliches Jahr hält 365, ein Schalt-Jahr 366 Tage.

§. 63.

L. Bisher haben wir grössere Abteilungen in kleinere verwandelt; jetzt wollen wir es umkehren, und kleinere in grössere verwandeln. Wie viel sind in 72 GuteGroschen Taler enthalten?

S. Drei; denn 72 : 24 = 3.

L. Und in 100 GuteGroschen?

S. 4 Taler und 4 Groschen: denn 100 : 24 = 4 + (4 : 24) Tl.

L. Aber 72 Pfennige, wie viel enthalten die GuteGroschen?

S. 72 : 12 = 6.

L. Und 100 Pfennige?

S. 100 : 12 = 8 + (8 : 12), das sind 8 ggr. 8 Pf.

L. Und 288 Pfennige?

S. 288 Pf. : 12 = 24 ggr.

24 ggr. : 24 = 1 Tl.

L. Und 4474 Pfennige?
S. 4474 Pf. : 12 = 360 ggr. + 10 Pf.
360 ggr. : 14 = 15 Tl. + 12 ggr.

4474 Pf. = 15 Tl. + 12 ggr. + 10 Pf.

UebungsExempel.

96 ggr. = (96 : 24) Tl. = 4 Tl.
120 " = (120 : 24) " = 5 "
144 " = (144 : 24) " = 6 "

Und so können alle Exempel §. 52, 53, 54, 55, rükkwärts gerechnet, hier als UebungsExempel dienen, in und ausser der Ordnung.

§. 64.

L. Wie viel Taler enthalten 90 KaiserGroschen?
S. 90 Kgr. : 30 = 3 Tl.
L. Aber 270 Kreuzer?
S. 270 Xer : 3 = 90 Kgr. = 3 Tl. (§. 56).
L. Und 1592 Kreuzer?
S. Machen 17 Tl. 20 Kgr. 2 Xer.
L. Aber 2700 preussische Schillinge, wie viel Taler halten die?
S. 2700 Schill. : 3 = 900 preuss. Grosch.
900 pr. Gr. : 3 = 300 Dütchen;
300 Dütchen : 30 = 10 Taler (§. 56.)

L.

L. Und 120 Stüber, wie viel Taler geben die?
S. 120 St. : 60 = 2 Taler (§. 57).
L. Und 360 MarienGroschen, wie viel Taler?
S. 360 Mgr. : 36 = 10 Tl. (§. 58).
L. Und 147654 Pfennige, wie viel MariensGroschen und Taler enthalten die?
S. 147654 Pf. : 8 = 18456 Mgr. + 6 Pf.
18456 Mgr. : 36 = 512 Tl. + 24 Mgr.
Also 147654 Pf. = 512 Tl. 24 Mgr. 6 Pf.
(Hier können die Exempel §. 56, 57, 58, rükkwärts gerechnet, als UebungsExempel dienen).

§. 65.

L. Wie viel Pfunde machen 14080 Quentchen?
S. 14080 Qu. = 14080 : 4 Lot = 3520 Lot.
L. Und 3520 Lot, wie viel Pfund?
S. 3520 L. = 3620 : 32 Pf. = 110 Pf.
L. Und 110 Pfund machen einen Zentner: also 14080 Q. = 3520 L. = 110 Pf. = 1 Zentner. Aber 3597778 Quentchen, wie viel Zentner, Pfunde, Lote, halten die?
S. 3597778 Q. = 25 Z. 60 Pf. 24 Lot 2 Quentchen.
(Als UebungsExempel können die §. 59 rükkwärts gerechnet werden).

§. 66.

§. 66.

L. Ein Scheffel hält 16 Metzen: wie viel Scheffel machen 384 Metzen?

S. 384 Metzen machen 24 Scheffel, das ist 1 Wispel.

L. Und 10616 Metzen?

S. Machen 27 Wispel, 15 Scheffel, 8 Metzen.

L. Und 13824 Metzen?

S. Machen 36 Wispel.

§. 67.

L. Der Umfang der Erde sei 1532,001600 Zoll. Wie viel sind das Schuhe, und Ruten?

S. 1532,001600 Z. = (1532001600 : 12) Sch. = 127666800 Sch. = (127666800 : 12) R. = 10638900 Ruten.

L. Und 1970 Ruten, 2 Schuh auf eine geographische Meile gerechnet: wie viel Meilen machen nun diese 10638900 Ruten.

S. Da bin ich genötigt, alle Ruten wieder in Schuhe zu verwandeln:

10638900 R. = 127666800 Schuh.
1970 R. + 2 Sch. = 23642 Schuh.
127666800 : 23642 = 5400 Meilen.

L. Es gilt hier, was bei §. 61. bemerkt ist. Die Zahl der Meilen ist bestimmt und fest, nur ihre Länge nicht. Diese kan 10 bis 15 Ruten gefehlt seyn.

II. Die vier RechnungsArten in benannten Zahlen.

§. 68.

L. Wie viel machen 6 Pfennige, und 4 Pfennige zusammen?

S. 10 Pfennige.

L. Aber 8 Pfennige und 4 Pfennige?

S. 12 Pfennige, oder einen GutenGroschen.

L. Und 8 Pfennige mehr 9 Pfennige?

S. Machen 17 Pfennige, oder 1 ggr. 5 Pf.

L. Und 16 ggr, mehr 8 ggr.?

S. Machen 24 ggr., oder einen Reichstaler.

L. Aber 16 ggr. mehr 10 ggr.?

S. Machen 26 ggr., oder 1 Rtl. 2 ggr.

L. Nun wollen wir einmal gehörig unter einander schreiben, und addiren: 5 Taler, 8 GuteGroschen; und 9 Taler 20 GuteGroschen!

S. 5 Tl. 8 ggr.
9 = 20 =

machen 14 Tl. 28 ggr.

oder 15 = 4 =

L. So ist es recht! Nun ein grösseres Exempel: 12 Tl. 18 ggr. 6 Pf.; und 25 Tl., 14 ggr. 3 Pf.

S. 12 Tl. 18 ggr. 6 Pf.
25 = 14 = 3 =

37 = 32 = 9 =

38 Tl. 8 ggr. 9 Pf.

L. Nun ein noch grösseres!

125 Tl. 16 ggr. 6 Pf.
385 = 8 = 6 =
36 = 7 = 8 =

S. 546 Tl. 31 ggr. 20 Pf.

547 = 8 = 8 =

L. Bei solchen kleinen Exempeln ist es nicht einmal notwendig, die erste Summe, 546 Tl. 31 ggr. 20 Pf. hinzuschreiben; man kan den einen Groschen, welcher in den 20 Pfennigen stekkt, gleich in Gedanken davon nehmen, und den 31 Groschen zurechnen. Auf gleiche Art kan man auch von 32 Groschen gleich den darin stekkenden Taler abziehn und den Talern zugesellen.

Uebungs-Exempel.

A.

5438	Tl.	20	ggr.	8	Pf.
725	=	16	=	6	=
3075	=	17	=		
25386	=	9	=	4	=
448	=	15	=	6	=
97	=			6	=
732	=	22	=		
2472	=	14	=	9	=
8692	=			3	=
503	=	10	=	10	=
47568	Tl.	123	ggr.	52	Pf.
47573	Tl.	7	ggr.	4	Pf.

B.

528	Zentner	93	Pfund	24	Lot	3	Quentch.
87	=	15	=	28	=		
8373	=	105	=	17	=	2	=
3018	=	81	=	30	=	2	=
12006	=	294	=	99	=	7	=
12008	Zr.	77	Pf.	4	Lot	3	Qu.

C.

C.

7	Wispel	8	Scheffel	12	Metzen
25	»	16	»	8	»
525	=	12	»	14	»
557	»	36	»	34	»
558	W.	14	Sch.	2	M.

D.

225	Ruten	8	Schuh	8	Zoll
395	»	10	=	4	=
9094	»	2	=	6	»
556	=	11	»	9	»
10270	»	31	=	27	»
10272	Ruten	9	Schuh	3	Zoll

§. 69.

L. Von 8 GuteGroschen und 6 Pfennigen, abgezogen 4 Groschen 2 Pfennige; wie viel bleibt?

S. Von 8 ggr. 6 Pf.
abgezogen 4 » 2 »
bleibt 4 ggr. 4 Pf.

L. Aber von 8 Groschen 6 Pfennigen, weggenommen 4 Groschen 8 Pfennige?

S. Von 8 ggr. 6 Pf.
abgezogen 4 » 8 »
bleibt 3 ggr. 10 Pf.

Uebungs-Exempel.

A.

Von 7 Rtlr. 14 ggr. 9 Pf.
abgezogen 2 = 12 = 10 =

bleibt 5 Rtlr. 1 ggr. 11 Pf.

B.

15 Rtlr. 16 ggr. 0 Pf.
7 , 20 , 6 ,

7 Rtlr. 19 ggr. 6 Pf.

C.

345 Rtlr. 0 ggr. 0 Pf.
86 , 16 , 8 ,

258 Rtlr. 7 ggr. 4 Pf.

Man muß hier die Reihe, von welcher der Abzug geschehn soll, sich so ausgedrükkt vorstellen:

344 Rtlr. 23 ggr. 12 Pf.

D.

45 Zentn. 9 Pfund 0 Lot 3 Quentch.
20 , 98 , 20 , 2 ,

429 Zr. 101 Pf. 12 L. 1 Q.

E.

523 Zr. 0 Pf. 0 Lot 0 Quentch.
57 , 20 , 2

522 Zr. 52 Pf. 11 L. 2 Q.

F.

F.

2·06· Ruten 9 Schuh 0 Zoll 6 Strich
30 , 10 , 6 , 8 ,

175 Ruten 10 Schuh 5 Zoll 10 Strich

G.

Jemand ist geboren 1744, den 15ten Nov., Morgens um 2 Uhr, 30 Minuten. Wie alt war er 1799, den 25sten September, Morgens um 7 Uhr?

Nach der eingeführten ZeitRechnung sind seit Christi Geburt ohngefähr verflossen 1799 Jahr, 267 Tage, 7 Stunden.

Zur Zeit seiner Geburt waren verflossen:
1744 Jahr, 318 Tage, 2 Stunden, 30 Min.

Diese Zahl von der vorigen abgezogen:

1799· Jahr 267 Tage 7· Stunden 0 Min.
1744 , 318 , 2 , 30 ,

bleibt 54 Jahr, 314 Tage, 4 Stunden, 30 Min.

H.

Doctor Martin Luther starb 1546, den 18ten Februar, alt 62 Jahr, 3 Monat, 8 Tage. Wan war er geboren? — Antwort: 1483, den 10ten November.

§. 70.

L. Wie viel machen 8 GuteGroschen 4 Mal genommen?

S. 8 ggr. × 4 = 32 ggr. = 1 Rtl. 8 ggr.

L. Aber 16 GuteGroschen 3 Mal genommen?

S. 16 ggr. × 3 = 48 ggr. = 2 Rtl.

L. Und 8 Pfennige 4 Mal genommen?

S. Machen 32 Pfennige, oder 2 Groschen 8 Pfennige.

L. Nun ein grösseres MultiplicationsExempel! 45 Taler, 18 GuteGroschen, 9 Pfennige, 5 Mal genommen.

S. 45 Rtl. 18 ggr. 9 Pf.
5 •

225 = 90 = 45 •

228 Rtl. 21 ggr. 9 Pf.

L. Nun 7 Taler, 16 Groschen, 5 Pfennige, durch 27 multiplicirt!

S. 7 Rtl. 16 ggr. 5 Pf.
27 •

189 Rtl. 112 135 Pf.
18 • 32

432 ggr.
11 »

207 Rtl. 11 ggr. 3 Pf.

Uebungs Exempel

A. (9 Rtl. 18 ggr. 6 Pf.) × 67 = 654 Rtl.
15 ggr. 6 Pf.

B. (14 Zentner 8 Pf.) × 321 = 4517 Zr.
38 Pf.

C. (365 Ruten, 8 Schuh, 6 Zoll) × 25 =
9142 R., 8 Schuh, 6 Zoll.

D. (215 Tage, 7 Stunden, 25 Minut., 30 Sec.)
× 12 = 2583 T., 17 St., 6 Minuten.

§. 71.

L. Drei Personen sollen sich in 6 Taler und 12 GuteGroschen teilen: wie viel erhält jede?

S. (6 Tl. 12 ggr.) : 3 = 2 Tl. 4 ggr.

L. Aber 12 Taler, 16 Groschen, 8 Pfennige, unter vier Personen geteilt; wie viel fält da auf jede?

S. (12 Tl. 16 ggr. 8 Pf.) : 4 = 3 Tl. 4 ggr. 2 Pf.

L. Aber 10 ggr. in 4 gleiche Teile geteilt?

S. Kommen auf jeden 2 Groschen und 6 Pf.

L. Und 25 Taler, 8 Groschen, 3 Pfennige, in 9 gleiche Teile?

S.

S. (25 Tl. 8 ggr. 3 Pf.) : 9 = 2 Tl. 19 ggr. 7 Pf.

18

7 Tl.

24

168 + 8 = 176 ggr.

86

5

12

60 + 3 = 63 Pf.

0

L. Man hätte auch können die Taler und Groschen in Pfennige verwandeln:

S. (25 Tl. 8 ggr. 3 Pf.) : 9 = 7299 Pf. : 9 = 2 Tl. 19 ggr. 7 Pf.

L. Das vorige Verfahren aber ist kürzer, und wir wollen also künftig dabei bleiben.

Uebungs-Exempel.

A. (53 Tl. 8 ggr.) : 6 = 8 Tl 21 ggr. 4 Pf.

B. (3 Tl. 4 Pf.) : 5 = 14 ggr. 5 Pf. und (3 : 5) Pf.

C. (801 Tl. 9 ggr. 6 Pf.) : 23 = 34 Tl. 20 ggr. 2 Pf. (20 : 23) Pf.

D. (125 Tl 18 ggr. 9 Pf.) : 405 = 7 ggr. 5 + (180 : 405) Pf.

E. (43 Pfd. 3 Q.) : 7 = 6 Pf. 4 L. 2 Q. u. (5 : 7) Q.

F. (2 Pfd. 3 L.) 89 = 3 Q. + (1 : 89) Q.

G. 28 Wisp. : 5 = 5 W. 14 Sch. 6 + (2 : 5) Metz.

Arithmetik.

Zweites Buch

Von Brüchen.

Allgemeine Begriffe von Brüchen, §. 72.
Vom Aufheben der Brüche, §. 86.
Brüche von einerlei Benennung, §. 90.
Die vier RechnungsArten in Brüchen, §. 94.
Vergleichung der Brüche und Quotienten, §. 108.
Von unreinen Brüchen, §. 114.

Allgemeine Begriffe von Brüchen.

§. 72.

L. Wenn ich einen Groschen, einen Pfennig, einen Apfel, oder sonst etwas, in drei gleiche Teile zerteile, und einen davon nehme: wie viel vom Ganzen habe ich dan?

S. Den dritten Teil, oder ein Drittel.

L. Und wenn ich zwei solcher Teile nehme?

S. So habe ich zwei Dritteile, oder Drittel.

L. Und wenn ich dreie nehme?

S. So habe ich drei Drittel, oder ein Ganzes.

L. Recht. Man schreibt ein Drittel, $\frac{1}{3}$; zwei Drittel, $\frac{2}{3}$; drei Drittel, $\frac{3}{3}$. Aber vier Drittel, oder $\frac{4}{3}$, wie viel würden die betragen?

S. Drei Drittel machen ein Ganzes; vier Drittel also noch ein Drittel über ein Ganzes.

L. So ist es richtig. Und fünf Drittel ($\frac{5}{3}$) machen ein Ganzes mehr zwei Drittel. Aber sechs Drittel, oder $\frac{6}{3}$::?

S. Machen zwei Ganze.

L. Aber wie viel Drittel werden erfodert, um drei Ganze zu machen?

S. Neun Drittel, oder $\frac{9}{3}$.

L. Wenn ich aber das Ganze in vier gleiche Teile zerlege, und eins davon nehme?

S. So habe ich einen vierten Teil, oder ein Virtel.

L. Das schreibt man $\frac{1}{4}$. — Aber wenn ich zweie davon nehme::?

S. So habe ich zwei Virtel, oder $\frac{2}{4}$, oder die Hälfte.

L. Und dreie machen drei Virtel ($\frac{3}{4}$), viere vier Virtel ($\frac{4}{4}$), oder ein Ganzes. Und fünfe::?

S. Machen fünf Virtel ($\frac{5}{4}$), oder ein Ganzes, und ein Virtel.

L. Aber acht Virtel ($\frac{8}{4}$), wie viel machen die?

S. Zwei Ganze.

L. Und wie viel Virtel werden zu drei Ganzen erfodert?

S. Zwölfe, oder $\frac{12}{4}$.

L. Zahlen oder Ausdrükke nun wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ ꝛc. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ ꝛc. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ꝛc. heissen gebrochene Zahlen, oder Brüche. Welches ist nun die Erklärung eines Bruches?

S.

S. Ein Ganzes in gleiche Teile zerteilt, und deren einen, oder mehre, genommen, heisst ein Bruch.

L. Recht! Und bei jedem Bruche ($\frac{2}{3}$ z. B.) sind zwei Dinge zu beobachten; nämlich erstens, in wie viel gleiche Teile das Ganze zerlegt ist (hier in drei), und zweitens: :?

S. Wie viel solcher Teile genommen sind (hier zweie).

L. Richtig! Die Zahl 3, welche anzeigt, in wie viel Teile das Ganze geteilt ist, heisst der Nenner; die, welche sagt, wie viel deren genommen sind, 2, der Zähler. Diese lezte wird oben, die erste unten geschrieben; beide trennt ein Strich: $\frac{2}{3}$. Der Zähler ist also die eigentliche Zahl des Bruches; der Nenner ist nur der Name der gezählten Dinge.

§. 73.

L. Ein Bruch wie $\frac{2}{3}$ zeigt an, daß das Ganze in drei gleiche Teile zerlegt ist, und deren zweie genommen sind. $\frac{2}{3}$ also machen kein Ganzes. Und so ist es mit allen Brüchen, deren Zähler kleiner ist als der Nenner; z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Wie ist es es aber mit $\frac{3}{3}$?

S. Die machen ein Ganzes, denn es sind alle Teile des Ganzen darin begriffen (§. 72).

L.

L. Und eben so ist es mit $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ ꝛc. kurz mit allen Brüchen, in welchen Zähler und Nenner gleich sind. — Welche Bewandniß aber hat es mit Brüchen, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$ ꝛc., wo der Zähler grösser ist als der Nenner?

S. Die enthalten mehr Teile, als worin das Ganze zerlegt ist, und sind also grösser (§. 72).

L. Recht! Nur die Brüche der ersten Art, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, heissen eigentliche, oder ächte Brüche: die der zweiten und dritten Art, deren Zähler entweder dem Nenner gleich, oder grösser ist als dieser, heissen uneigentliche, oder unächte. — Wer kan nun Beispiele von ächten Brüchen geben?

S. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ u. s. w.

L. Und Beispiele von unächten?

S. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$ ꝛc.; $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ ꝛc.; $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$ ꝛc.

§. 74.

L. Brüche, wie $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ machen ein Ganzes (§. 73): was bedeutet aber der Bruch $\frac{1}{1}$?

S. Auch ein Ganzes: denn der Nenner 1 sagt, daß das Ganze nicht zerteilt, sondern in einem Stükk unzertrent geblieben; und der

Zäh-

Zähler 1 deutet an, daß ein EinTeil, das heißt ein Ganzes, genommen ist.

L. Und was bedeuten $\frac{2}{1}$?

S. $\frac{2}{1} = 2$: denn das Ganze ist ungeteilt geblieben, und es sind deren zweie genommen.

L. Und so ist $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{4}{1} = 4$ u. s. w. Es läßt sich also jede ganze Zahl in einen Bruch verwandeln: und wie?

S. Man gibt ihr 1 zum Nenner.

§. 75.

L. Welcher Teil des Ganzen ist der Bruch $\frac{1}{2}$?

S. Die Hälfte.

L. Und dessen Zähler 1, welcher Teil des Nenners 2 ist der?

S. Auch die Hälfte.

L. Und eben so ist es mit $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ ꝛc. — Aber $\frac{1}{3}$, welcher Teil des Ganzen ist das?

S. Der dritte Teil.

L. Und $\frac{2}{3}$?

S. Ist zwei Dritteile des Ganzen.

L. Und die Zähler 1, 2, welche Teile ihrer Nenner sind die?

S. Der Zähler 1 ist der dritte Teil, nnd der Zähler 2 ist zwei Dritteile von 3.

L. Welche Lehre kan man daraus ziehn?

S. Jeder Bruch ist ein solcher Teil des Ganzen, als sein Zähler vom Nenner ist.

L. Aber findet dieses auch bei unächten Brüchen Stat? Z. B. bei $\frac{2}{2}$?

S. Ja: denn $\frac{2}{2}$ ist ein Ganzes (§. 33); und der Zähler 2 ist dem ganzen Nenner gleich.

L. Aber wie ist es mit $\frac{2}{1}$?

S. $\frac{2}{1} = 2$ (§. 74); und der Zähler 2 hält den Nenner 1 zwei Mal in sich.

L. Die Regel also ist allgemein: Jeder Bruch verhält sich zum Ganzen, wie sein Zähler zu seinem Nenner: oder: Jeder Bruch enthält das Ganze so oft, als sein Zähler den Nenner enthält. Stekkt z. B. der Nenner ein Mal im Zähler, wie in dem Bruche $\frac{2}{2}$::?

S. So ist der Bruch ein Ganzes.

L. Und stekkt der Nenner zwei Mal im Zähler, wie $\frac{4}{2}$::?

S. So sind es zwei Ganze.

L. Wie aber, wenn der Nenner nur ein halb Mal im Zähler stekkt, wie in $\frac{2}{4}$?

S. So ist der Wert des Bruches ein Halbes.

§. 76.

L. Hier ist ein Bruch $\frac{8}{4}$: wie viel Ganze stekken darin?

S.

S. $\frac{8}{4}$ = 2 Ganze.

L. Und in $1\frac{2}{3}$?

S. $1\frac{2}{3}$ = 4 Ganze.

L. Und in $1\frac{3}{3}$?

S. $1\frac{3}{3}$ = 4 + $\frac{1}{3}$.

L. Und wie verfährt man, um die Ganze zu finden, welche ein unächter Bruch, $\frac{8}{4}$, $1\frac{2}{3}$, oder $1\frac{3}{3}$ enthält?

S. Man dividirt den Zähler durch den Nenner:

$\frac{8}{4}$ = 8 : 4 = 2

$1\frac{2}{3}$ = 12 : 3 = 4

$1\frac{3}{3}$ = 13 : 3 = 4 + $\frac{1}{3}$

Uebungs-Exempel:

$1\frac{8}{4}$ = 4 + $\frac{2}{4}$

$2\frac{0}{4}$ = 5

$2\frac{4}{4}$ = 6

$2\frac{7}{4}$ = 6 + $\frac{3}{4}$

$4\frac{0}{4}$ = 10

$3\frac{0}{5}$ = 6

$3\frac{2}{5}$ = 6 + $\frac{2}{5}$

$3\frac{2}{10}$ = 3 + $\frac{2}{10}$

$12\frac{0}{15}$ = 8

$36\frac{0}{25}$ = 14 + $\frac{10}{25}$

§. 77.

L. Hier sind zwei Brüche:

$\frac{2}{4}$, und $\frac{3}{4}$;

welcher von beiden ist der gröste?

S. $\frac{3}{4}$ ist grösser als $\frac{2}{4}$.

L. Und von $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$?

S. Ist $\frac{4}{5}$ der grösste.

L. Aber von $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{6}$?

S. $\frac{6}{6} > \frac{5}{6}$.

L. Und von $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{7}$?

S. Ist $\frac{8}{7}$ der gröste. Ueberhaupt: Von zwei, oder mehren Brüchen ist der der gröste, der den grösten Zähler hat.

L. Also wäre $\frac{4}{8}$ grösser als $\frac{3}{4}$?

S. Nein: $\frac{3}{4}$ ist grösser als $\frac{4}{8}$.

L. Der Satz also, daß der Bruch, welcher den grösten Zähler hat, der gröste sei, ist nicht allgemein. Wie wird er genauer bestimmt?

S. Von zwei oder mehren Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist der gröste der, welcher den grösten Zähler hat.

§. 78.

L. Hier ist ein Bruch $\frac{2}{4}$. Wenn man den nun doppelt nimt, was erhält man dan?

S. $\frac{2}{4}$ zwei Mal genommen, gibt $\frac{4}{4}$ oder ein Ganzes.

L. Also $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \times 2$ (§. 16) $= \frac{4}{4} = \frac{2 \times 2}{4}$ — Aber $\frac{2}{4}$ dreifach genommen?

S. $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \times 3$ (§. 16) $= \frac{6}{4} = \frac{2 \times 3}{4}$

L.

L. Und $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (§. 16) $= \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{3}$

$\frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = \frac{1 \times 3}{3}$

$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{2 \times 2}{3}$

u. s. w.

Was kan man daraus lernen?

S. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren.

L. Wie geschiht das?

S. Man multiplicirt bloß seinen Zähler, und läßt den Nenner ungeändert.

L. Recht: Denn man nimt der Teile mehr, ohne ihre Grösse zu ändern.

Uebungs Exempel.

$\frac{2}{4} \times 2 = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{4}{4} \times 2 = \frac{6}{4} \times 2 = \frac{9}{4} \times 2 = \frac{2}{5} \times 2 =$

$\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{1}{5} \times 2 =$

$\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{1}{6} \times 2 =$

$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times 5 =$

$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{2} \times 4 = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{1}{3} \times 2 =$

$\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3} \times 3 =$

$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{3} \times 4 =$

$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{1}{3} \times 5 =$

§. 79.

L. Wenn aber eines Bruches Nenner durch eine ganze Zahl multiplicirt wird, und der Zähler ungeändert bleibt: $\frac{1}{4 \times 2}$

was wird dan daraus?

S. $\frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$, das ist nur die Hälfte von $\frac{1}{4}$.

L. Also $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} : 2$ (§. 34).

Und $\frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 2$

Was kan man hieraus lernen?

S. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

L. Wie geschiht das?

S. Man multiplicirt den Nenner durch den Divisor, und lässt den Zähler ungeändert.

L. Recht! Aber wie lässt sich das erklären?

S. Sehr gut. Durch Multiplication des Nenners werden der Teile, in welche das Ganze zerlegt ist, mehre; aber eben deshalb werden sie kleiner. Verdoppele ich sie, so wird jeder nur halb so groß als zuvor; und doch nimt man, da der Zähler ungeändert bleibt, ihrer nicht mehr als vorhin.

L. Die Erklärung ist richtig.

Uebungs-Exempel.

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$

$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$

$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$

§. 80.

L. Ein Bruch also wird, durch Multiplication seines Zählers, multiplicirt (§. 75); und durch Multiplication seines Nenners dividirt (§. 76). Wie aber, wenn Zähler und Nenner zugleich durch einerlei ganze Zahl multiplicirt werden:

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2}$$

was entsteht daraus?

S. Dan bleibt der Bruch in seinen Würden:

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L. Wie geht das aber zu?

S. Multiplication und Division stehn einander entgegen, oder vernichten einander (§. 43). Wird also Zähler und Nenner durch einerlei ganze Zahl multiplicirt, so bleibt der Wert des Bruches ungeändert.

§. 81.

L. Wenn man eines beliebigen Bruches, z. B. $\frac{1}{2}$, Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl, 2, multiplicirt, und das so fortsetzt; so erhält man:
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \frac{64}{128} = \frac{128}{256}$ &c.
Oder wenn man durch 3 multiplicirt:
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54} = \frac{81}{162} = \frac{243}{486} = \frac{729}{1458} = \frac{2187}{4374}$ &c.
Was kan man daraus für eine Lehre ziehn?

S. Für jeden Bruch gibt es unzählige Ausdrükke.

L. Und da sich jede ganze Zahl in einen Bruch verwandeln lässt (§. 74); so lässt sich dieser Satz noch weiter ausdehnen.

S. Es gibt für jede Zahl (es sei eine ganze, oder eine gebrochene) unzählige Ausdrücke.

L. Beispiele von ganzen Zahlen sind: :?

S. $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6}$ &c.

$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16}$ &c.

$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{24}{8} = \frac{48}{16}$ &c.

u. s. w.

§. 32.

L. Nun wollen wir einmal den Zähler eines Bruches durch eine ganze Zahl dividiren:

$\frac{2}{4} : 2$

und sehn, was daraus wird.

S. $\frac{2:2}{4} = \frac{1}{4}$.

L. $\frac{1}{4}$ aber ist die Hälfte von $\frac{2}{4}$; folglich

$\frac{2:2}{4} = \frac{2}{4} : 2$ (§. 34).

Und nun wollen wir den Nenner eben dieses Bruches, bei unverändertem Zähler, dividiren.

S. $\frac{2}{4:2} = \frac{2}{2} = 1$.

L.

L. $\frac{2}{2}$ aber ist zwei Mal so groß als $\frac{2}{4}$.
Folglich $\frac{2}{4:2} = \frac{2}{4} \times 2$ (§. 16).
Und vorhin $\frac{2:2}{4} = \frac{2}{4} : 2$.
Was kan man hieraus lernen?

S. Ein Bruch wird durch Division seines Zählers mit einer ganzen Zahl, durch dieselbe dividirt; durch Division seines Nenners aber multiplicirt.

L Und wie geht das zu?

S. Wird der Zähler dividirt; so erhält man der Teile wenige; wird aber der Nenner dividirt; so erhält man zwar nicht weniger, aber kleinere Teile.

§. 83.

L. Brüche also durch ganze Zahlen zu multipliciren und zu dividiren, gibt es zweierlei Mittel. Ein Bruch $\frac{2}{4}$, z. B., wird multiplicirt durch 2 ::?

S. $\frac{2}{4} \times 2 = \frac{2 \times 2}{4}$ (§. 75) $= \frac{4}{4} = 1$.
Oder auch $\frac{2}{4} \times 2 = \frac{2}{4:2}$ (§. 79) $= \frac{2}{2} = 1$.

L. Und nun wollen wir eben diesen Bruch, $\frac{2}{4}$, durch 2 dividiren!

S. $\frac{2}{4} : 2 = \frac{2:2}{4}$ (§. 79) $= \frac{1}{4}$
Oder auch $\frac{2}{4} : 2 = \frac{2}{4 \times 2}$ (§. 76) $= \frac{2}{8}$

L. Ein Bruch also wird durch eine ganze Zahl multiplicirt::?

S.

S. Entweder durch Multiplication seines Zählers, oder durch Division seines Nenners.

L. Und ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt::?

S. Durch Division seines Zählers, oder durch Multiplication seines Nenners.

L. Zuweilen sind beide VerfahrungsArten anwendbar, wie bei $\frac{2}{4} : 2$, und da kan man die schicklichste wählen: aber das ist nicht immer der Fall. Wenn z. B. $\frac{2}{3}$ durch 3 zu dividiren wäre::?

S. Da muß man den Nenner multipliciren, weil der Zähler nicht ohne Reste teilbar ist.

$$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

UebungsExempel.

$\frac{1}{6} \; \frac{1}{4} \; \frac{2}{9} \; \frac{3}{10} \; \frac{5}{24} \; \frac{2}{9} \; \frac{3}{20} \; \frac{4}{27}$

$= = = = = = = =$

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{10 \times 3} = \frac{5}{6} : 4 = \frac{5}{6 \times 4} = \frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{20}{27} : 5 = \frac{20}{27 \times 5} =$

$\frac{3}{2} \; \frac{1}{2} \; \frac{6}{5}$

$= = =$

$2 = \frac{2}{1} = \frac{8}{3} \; \frac{5}{3} \; \frac{15}{4}$

$= = = =$

$3 \; \frac{3}{3}$

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{6 \times 3} = \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \times 4} = \frac{5}{12} : 4 = \frac{5}{12 \times 4} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{15} : 5 = \frac{3}{15 \times 5} =$

$\frac{1}{2} \; \frac{1}{6} \; \frac{2}{5} \; \frac{2}{3} \; \frac{2}{3} \; \frac{5}{12} \; \frac{3}{4} \; \frac{3}{15}$

$\times 3 = \times 3 = \times 3 = \times 3 = \times 4 = \times 4 = \times 5 = \times 5 =$

$= = = = = = = =$

§. 84.

L. Durch Division des Zählers also wird ein Bruch dividirt, und durch Division seines Nenners wird er multiplicirt (§. 82): was widerfährt ihm aber, wenn sein Zähler und Nenner zugleich, durch einerlei ganze Zahl, dividirt werden?

Z. B. $\frac{2}{4} : \frac{2}{2}$

S. $\frac{2}{4} : \frac{2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Wenn Zähler und Nenner durch einerlei ganze Zahl dividirt werden; so bleibt der Wert des Bruches ungeändert.

L. Und woher das?

S. Durch Division des Zählers wird der Bruch dividirt, und durch Division des Nenners wird er multiplicirt (§. 82). Multiplication und Division aber stehn einander entgegen (§. 43). Geschiht daher beides durch einerlei Zahl; so vernichten sie einander.

UebungsExempel.

$\frac{24}{32} = \frac{24:2}{32:2} = \frac{12}{16} = \frac{12:2}{16:2} = \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3} = \frac{12:6}{18:6}$

§. 85.

L. $\left.\begin{array}{l}\frac{2 \times 4}{3} = \frac{2}{3} : 4 \\ \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \times 4}\end{array}\right)$ (§ 83).

Wie läßt sich nun $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ umändern?

S. $\frac{\frac{2}{3} : 4}{\frac{2}{3} : 5} = \frac{\frac{2}{3 \times 4}}{\frac{2 \times 5}{3}}$

$$\frac{\frac{2}{3} : 4}{\frac{2}{3} : 5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$$

Dieses wollen wir uns vorläufig merken. Es wird uns in der Folge zu Statten kommen (§. 99).

Das Aufheben der Brüche.

§. 86.

L. Wenn ein Bruch, durch Division seines Zählers und Nenners mit einerlei ganzen Zahl (§. 84), zu seinen kleinsten Ausdrükken gebracht wird:

$\frac{4}{8} : \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$; oder $\frac{24}{32} : \frac{8}{8} = \frac{3}{4}$:

so heisst das, ihn aufheben, oder reduciren. — Kleine Zahlen sind bequemer zu behandeln, als grosse; und der Bruch $\frac{3}{4}$ ist verständlicher, als der $\frac{24}{32}$. Das ist die Ursache, warum man Brüche gern aufhebt.

§. 87.

L. Manche Brüche sind gar leicht aufzuheben, wie z. B. die, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$ ꝛc.

S. $\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{8} = \frac{4 : 4}{8 : 4} = \frac{1}{2}$

$\frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$.

L. Ganz richtig! Wie wird aber $\frac{18}{30}$ aufgehoben?

S. $\frac{18 : 2}{30 : 2} = \frac{9}{15}$.

S.

L. Das ist zwar richtig, aber noch nicht vollständig: denn der Bruch $\frac{9}{15}$ läßt sich noch weiter aufheben.

S. $\frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$

L. Also $\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{18:6}{30:6}$

Dieses allmähliche Aufheben, durch kleinere Zahlen, führt auch zum Zwekk, obgleich die mehreste Zeit langsamer, und durch Umwege. Nicht selten aber ist es auch vortheilhaft. Zum Beispiel kan $\frac{112}{256}$ dienen.

S. $\frac{112:2}{256:2} = \frac{56:2}{128:2} = \frac{28:4}{64:4} = \frac{7}{16}$

L. Hier hätte man auch durch 16 aufheben können: aber offenbar leichter ist es, dieses durch 2 und 8, oder durch 4 und 4 zu bewerkstelligen. — Wer unternimt es, den Bruch $\frac{45}{360}$ aufzuheben?

S. $\frac{45:5}{360:5} = \frac{9:9}{72:9} = \frac{1}{8}$.

L. Man kan auch Zähler und Nenner in ihre Factoren zerlegen (§. 16), und die gemeinschaftlichen wegstreichen:

$$\frac{45}{360} = \frac{9 \times 5}{36 \times 10} = \frac{3 \times 3 \times 5}{3 \times 12 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 1}{3 \times 4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Uebungs-Exempel.

a) $\frac{36}{66} = \frac{36:6}{66:6} = \frac{6}{11}$

b) $\frac{39}{52} = \frac{39:13}{52:13} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{30}{45} = \frac{30:15}{45:15} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{99}{121} = \frac{99:11}{121:11} = \frac{9}{11}$

e) $\frac{35}{63} = \frac{35:7}{63:7} = \frac{5}{9}$

f) $\frac{64}{256} = \frac{64:64}{256:64} = \frac{1}{4}$

g) $\frac{140}{195} = \frac{140:5}{195:5} = \frac{28}{39}$

h) $\frac{111}{144} = \frac{111:3}{144:3} = \frac{37}{48}$

Zu merken ist noch, daß man das Aufheben auch so bezeichnet:

a) $\frac{36}{66}\Big|^{(2)}\frac{18}{33}\Big|^{(3)}\frac{6}{11}$ b) $\frac{39}{52}\Big|^{(13)}\frac{3}{4}$ c) $\frac{30}{45}\Big|^{(3)}\frac{10}{15}\Big|^{(5)}\frac{2}{3}$ ꝛc.

§. 88.

L. Durch Uebung und Nachdenken bildet man sich bald einige Regeln zu Erleichterung des Aufhebens. Z. B. alle gerade Zahlen, wie 2, 4, 6, 8, 10, 12 ꝛc. haben einen gemeinschaftlichen Factor. Und welcher ist es?

S. Es ist 2.

L. Und alle mit 5, oder mit 0 schliessenden, wie 5, 10, 15, 20, 25, 30 ꝛc. haben auch einen gemeinschaftlichen.

S. Der ist 5.

L. Ueberhaupt entscheidet die lezte Ziffer die Teilbarkeit einer Zahl. Z. B. die Zahl 221, könte die wol durch 2 teilbar seyn?

S. Nein: nur gerade Zahlen sind durch 2 teilbar.

L. Und durch 4, 6, 8 ꝛc. eben so wenig. Aber durch 5, 15, 25 ::?

S. Auch nicht; denn alle Producte, von denen 5, 15, 25 ꝛc. Factoren sind, schliessen entweder mit 5, oder mit 0. $5\times2=10$; $5\times3=15$; $5\times4=20$ ꝛc.

L. Wir wissen also, welche Zahlen nicht Factoren seyn können: und das ist schon viel gewonnen; denn es erspart wenigstens vergebliche Mühe. — Aber welche Zahlen könten nun wol Factoren von 221 seyn?

S. Die ZwischenZahlen 3, 7, 11, 13, 17, und überhaupt alle mit 1, 3, 7 schliessenden.

L. Das ist richtig: denn diese Zahlen geben Producte, welche mit 1 schliessen: $3 \times 7 = 21$; $11 \times 11 = 121$; $13 \times 17 = 221$.

§. 89.

L. Es kan aber Fälle geben, wo es auch dem Geübtesten schwer fält, einen gemeinschaftlichen Factor, oder Divisor, zu entdekken, wie z. B. in den Brüchen $\frac{78}{195}$, $\frac{533}{697}$, und $\frac{28829}{104775}$. Welcher könte es in dem ersten, $\frac{78}{195}$ wol seyn?

S. Unter den Zahlen von 2 bis 9 findet sich keine, als 9, die zwei Producte gibt, welche mit 8 und 5 schliessen; nämlich $9 \times 2 = 18$, und $9 \times 5 = 45$. 9 selbst aber kan hier kein Factor seyn, weil $9 \times 8 = 72 < 78$, und $9 \times 9 = 81 > 78$. Es muß also eine andre mit 9 schliessende Zahl seyn, wie etwan 19, 29, 39 ꝛc.

Das ist richtig. Es gibt aber noch ein andres Mittel, den gemeinschaftlichen Factor zu finden. So viel ist gewiß, daß er, in vorstehendem Bruche $\frac{78}{195}$ nicht gröſſer seyn kan als 78. Zwar wissen wir aus voriger Untersuchung, daß 78 es nicht seyn kan; aber

wir

wir wollen tuhn, als ob wir's nicht wüsten, und die Probe anßellen; das heisst, den Nenner, 195, durch 78 dividiren, oder grösserer Deutlichkeit wegen, ihn in Stükke von der Grösse 78 zerlegen, und sehn, ob das ohne Rest geschehn könne.

S. $\frac{78}{78 + 78 + 39}$

L. Es geht also nicht an, sondern es bleibt 39 übrig. Nun ist wieder klar, daß der gröste gemeinschaftliche Divisor nicht grösser seyn könne als 39. Wir versuchen also damit.

S. $\frac{78 : 39}{(78 + 78 + 39) : 39} = \frac{2}{5}$.

L. Dieser Bruch $\frac{78}{195}$ also ist glücklich aufgehoben, und wir haben zugleich daraus gelernt, wie wir in ähnlichen Fällen zu verfahren haben. Nun wollen wir den Bruch $\frac{533}{697}$ danach behandeln.

S. a) $\frac{533}{697} = \frac{533}{533 + 164}$

b) $\frac{533}{164} = \frac{(164 \times 3) + 41}{164}$

c) $\frac{41}{164} = \frac{41}{41 \times 4}$

d) $\frac{533 : 41}{697 : 41} = \frac{13}{17}$

L. Nun auch den Bruch $\frac{28829}{104775}$! Wir wollen es uns aber bequemer machen; immer den Dividendus, den Divisor, und den Quotienten neben einander setzen.

S. a) 104775 : 28829 = 3 + $\frac{18288}{28829}$

b) 28829 : 18288 = 1 + $\frac{10541}{18288}$

c) 18288 : 10541 = 1 + $\frac{7747}{10541}$

d) 10541 : 7747 = 1 + $\frac{2794}{7747}$

e) 7747 : 2794 = 2 + $\frac{2159}{2794}$

f) 2794 : 2195 = 1 + $\frac{635}{2159}$

g) 2159 : 635 = 3 + $\frac{254}{635}$

h) 635 : 254 = 2 + $\frac{127}{254}$

i) 254 : 127 = 2

k) $\frac{28829 : 127}{104775 : 127} = \frac{227}{825}$

Vor

Vorstehende Exempel enthalten die praktische Auflösung der Aufgabe: Den grösten gemeinschaftlichen Factor (oder Divisor ohne Rest) zweier Zahlen zu finden. Wie ist das Verfahren?

S. Man dividirt die grössere der beiden Zahlen durch die kleinere. Kan dieses ohne Ueberschuß geschehn, so hat man an der lezten schon den grösten gemeinschaftlichen Teiler. Bleibt aber etwas übrig; so dividirt man dadurch den vorigen Divisor. Und dieses sezt man fort, bis nichts übrig bleibt: so hat man an dem lezten Divisor zugleich den grösten gemeinschaftlichen Factor der gegebenen Zahlen, welcher sie ohne Ueberschuß teilt.

L. Nun wollen wir noch einen Bruch, $\frac{11}{25}$, hiernach behandeln.

S. a) $25 : 11 = 2 + \frac{3}{11}$
b) $11 : 3 = 3 + \frac{2}{3}$
c) $3 : 2 = 1 + \frac{1}{2}$
d) $2 : 1 = 2$

L. Der lezte Divisor also ist 1. Was bedeutet das?

S. Daß die Zahlen 11 und 25 keinen gemeinschaftlichen Factor haben als 1, und der Bruch $\frac{11}{25}$ sich folglich nicht aufheben lässt.

Brüche

Brüche von einerlei Benennung.

§. 90.

L. Von Brüchen, wie $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, welche gleiche Nenner haben, pflegt man auch zu sagen, sie haben gleiche, oder einerlei Benennung. Lassen sich wol ein Par Brüche mit verschiedenen Nennern,

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$,

unter einerlei Benennung bringen? Das heisst, ihrem Werte unbeschadet ihnen gleiche Nenner geben?

S. O ja. $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$ (§. 80) $= \frac{2}{4}$

L. Und eben so leicht sind die Brüche

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$

$\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$

unter einerlei Benennung zu bringen.

S. $\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$

$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$

L. Es gibt aber Fälle, wo es schwerer ist; wenn, z. B., die Brüche

$\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$

unter einerlei Benennung zu bringen wären.

S. Das weis ich nicht zu bewerkstelligen.

L. Keiner von beiden lässt sich zu des andern Benennung bringen. $\frac{1}{2}$ kan nicht den Nenner 3, und $\frac{2}{3}$ nicht den Nenner 2 bekommen, ohne Ver-

änderung seines Werts. Aber liesse sich nicht eine dritte Benennung finden, die beiden angemessen wäre?

S. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$; $\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$.

L. Und nun die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$!

S. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$.

L. Welches ist nun die Regel des Verfahrens, um zwei Brüche unter eine Benennung zu bringen?

S. Man multiplicirt jedes Zähler und Nenner durch den Nenner des andern.

Uebungs-Exempel.

a) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{7} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{7}$ und $\frac{3}{7} \times \frac{6}{6} = \frac{35}{42}$ und $\frac{18}{42}$
b) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{6}$ und $\frac{5}{6} \times \frac{4}{4} = \frac{18}{24}$ und $\frac{20}{24}$
c) $\frac{3}{10}$ und $\frac{5}{12} = \frac{3}{10} \times \frac{12}{12}$ u. $\frac{5}{12} \times \frac{10}{10} = \frac{36}{120}$ u. $\frac{50}{120}$

§. 91.

L Aber nun ist die Frage: Wie bringt man drei Brüche:

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$,

zu einerlei Benennung?

S. $\frac{1 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 4} = \frac{3 \times 4}{6 \times 4} = \frac{12}{24}$

$\frac{2 \times 2 \times 4}{3 \times 2 \times 4} = \frac{4 \times 4}{6 \times 4} = \frac{16}{24}$

$\frac{3 \times 2 \times 3}{4 \times 2 \times 3} = \frac{6 \times 3}{8 \times 3} = \frac{18}{24}$

Man multiplicirt jedes Zähler und Nenner durch die Nenner der beiden andern.

L. Es ist richtig. Aber worauf gründet sich dieses Verfahren? Wie beweist man, daß alle drei Brüche auf solche Art einerlei Nenner erhalten müssen?

S. Sie sind aus einerlei Factoren zusammengesetzt, nur in veränderter Ordnung: $2 \times 3 \times 4$, $3 \times 2 \times 4$, $4 \times 2 \times 3$. Aber einerlei Factoren geben, in veränderter Ordnung, doch einerlei Product (§. 21).

L. Recht! Und auf eben die Art lassen sich vier, fünf, und mehre Brüche unter einerlei Benennung bringen: Man multiplicirt nämlich jedes Zähler und Nenner durch die Nenner aller übrigen; oder, welches auf eins heraus kömt, durch das Product aus selbigen (§. 21).

Uebungs-Exempel.

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

$= \frac{2 \times 20}{3 \times 20} = \frac{40}{60}, \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}, \frac{4 \times 12}{5 \times 12} \frac{48}{60}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

$\frac{1 \times 60}{2 \times 60} = \frac{60}{120}, \frac{2 \times 40}{3 \times 40} = \frac{80}{120}, \frac{3 \times 30}{4 \times 30} = \frac{90}{120}, \frac{4 \times 24}{5 \times 24} = \frac{96}{120}$

c) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

$\frac{120}{360}, \frac{270}{360}, \frac{288}{360}, \frac{300}{360}$.

§. 92.

L. Zuweilen lassen sich auch Abkürzungen anbringen; z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ unter eine Benennung zu bringen, darf man nur Zähler und Nenner von $\frac{1}{2}$ durch 2 multipliciren: $\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ (§. 89): Und eben so leicht ist es $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{8}$, mit $\frac{1}{16}$, mit $\frac{1}{6}$, mit $\frac{1}{12}$ ꝛc. unter gleiche Benennung zu bringen. Wir wollen den Versuch damit machen. Zuerst $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$.

S. $\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$.

L. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$!

S. $\frac{1 \times 8}{2 \times 8} = \frac{8}{16}$.

L. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$!

S. $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$.

L. $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{12}$!

S. $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$.

L. Aber nun drei Brüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, und $\frac{3}{8}$!

S. $\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$; $\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$.

L. Aber $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, und $\frac{3}{4}$!

S. $\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$; $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$; $\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$

L. Hat man aber solche Brüche nach gewöhnlicher Art behandelt, so lassen sie sich zum Teil wieder aufheben, ohne die gleiche Benennung zu verlieren: z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} = \frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$ (§. 91).

S. $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24} = \frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ (§. 84).

L. Das ist dan ein Zeichen, daß Abkürzung Stat gehabt hätte:

$\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$; $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$; $\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$.

Uebungs Exempel.

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12} = \frac{8}{12}, \frac{10}{12}, \frac{5}{12}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18} = \frac{12}{18}, \frac{15}{18}, \frac{5}{18}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{20} = \frac{40}{60}, \frac{48}{60}, \frac{21}{60}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{47}{63} = \frac{21}{63}, \frac{56}{63}, \frac{47}{63}$

e) $\frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{9}{20} = \frac{50}{60}, \frac{42}{60}, \frac{27}{60}$

f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} = \frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$.

§. 93.

L. Ganze Zahlen lassen sich in Brüche verwandeln (§. 74). Es müssen sich also auch ganze Zahlen, mit Brüchen unter eine Benennung bringen lassen: z. B. 2 mit $\frac{3}{4}$!

S. $2, \frac{3}{4} = \frac{2}{1}, \frac{3}{4} = \frac{8}{4}, \frac{3}{4}$

L. Aber 2, 3, $\frac{1}{3}$!

S. $= \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3} = \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{3}$.

L. Die Regel des Verfahrens also ist::?

S. Man verwandelt die ganzen Zahlen in unächte Brüche, und verfährt dan nach §. 90, 91, 92.

Uebungs-Exempel

a) $2, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} = \frac{2 \times 12}{1 \times 12}, \frac{2 \times 4}{3 \times 4}, \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{24}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$.

b) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} = \frac{40}{20}, \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$

c) $3, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} = \frac{60}{20}, \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$

d) $3, 4, \frac{4}{5} = \frac{15}{5}, \frac{20}{5}, \frac{4}{5}$

Die

Die vier RechnungsArten in Brüchen.

A. Addition und Subtraction der Brüche.

§. 94.

L. $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ addirt, wie viel macht das?

S. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

L. Aber $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahirt?

S. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

L. Wie geschiht nun das Addiren und Subtrahiren der Brüche? Werden die Zähler, oder die Nenner, oder beide zugleich, addirt und subtrahirt?

S. Nur die Zähler.

L. Warum nicht auch die Nenner?

S. Der Zähler ist die eigentliche Zahl; der Nenner ist nur der Namen der Teile, welche der Zähler zählt (§. 72). $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ würde $\frac{4}{8}$, das ist $\frac{2}{4}$, geben, wenn man die Nenner auch addirte.

L. Also nur die Zähler werden addirt und subtrahirt! — Wie viel machen denn nun $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen?

S. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

L. Woher das? Die beiden Zähler machen ja zusammen nicht 3, sondern nur 2; und der eine Nenner ist nicht 4, sondern 2.

S. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (§. 80):
Folglich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

L. Und $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahirt?

S. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$.

L. Worauf also hat man, beim Addiren und Subtrahiren der Brüche zuerst zu sehn?

S. Ob sie gleiche Nenner haben.

L. Und haben sie die nicht::?

S. So muß man sie ihnen geben (§. 90 f.)

Uebungs-Exempel.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$
b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$
c) $2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{12+16+18}{24} = \frac{46}{24} = \frac{13}{12} = 1 + \frac{11}{12}$

B. Multiplication der Brüche.

§. 95.

L. Wie wird ein Bruch, $\frac{3}{4}$, durch eine ganze Zahl, 2, multiplicirt?

S. Durch Multiplication seines Zählers (§. 78):
$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (§. 84):
Oder auch durch Division seines Nenners (§. 82):
$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4 : 2} = \frac{3}{2}$.

L. Wie wird nun aber, umgekehrt, eine ganze Zahl, 2, durch einen Bruch, $\frac{3}{4}$, multiplicirt?

S. $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

L. Von ganzen Zahlen ist das wahr (§. 20): aber daß es auch auf gebrochene Anwendung finde, ist noch nicht erwiesen. — Wie oft muß jeder Factor im Producte stekken?

S. So oft, als die Einheit in dem andern (§. 21). Nun stekkt in dem Factor 2 die Einheit zwei Mal; folglich stekkt der andere Factor $\frac{3}{4}$ auch zwei Mal in dem Producte $\frac{6}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Dagegen stekkt in dem $\frac{3}{4}$ die Einheit nicht ganz, sondern nur drei Viertel Mal; folglich kan der Factor 2 auch nur drei Viertel Mal in dem Producte stekken.

L. Es wäre also zu zeigen, daß $\frac{3}{2}$ oder $\frac{6}{4}$ wirklich drei Vierteile von 2; das heißt, daß $(2 : 4) \times 3 = \frac{6}{4}$ sei.

S. $(2 : 4) \times 3 = (\frac{2}{1} : 4) \times 3$ (§. 74) $= \frac{2}{1 \times 4} \times 3$ (§. 79) $= \frac{2 \times 3}{4}$ (§. 78) $= \frac{6}{4}$.

L. Also eine ganze Zahl durch einen Bruch multipliciren geschiht::?

S. Indem man die ganze Zahl durch des Bruches Zähler multiplicirt, und ihr den Nenner desselben zum Nenner gibt.

Uebungs-Exempel.

a) $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
b) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$
c) $4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
d) $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
e) $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
f) $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
g) $2 \times \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2 + \frac{1}{2}$
h) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
i) $5 \times \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$
k) $10 \times \frac{5}{6} = \frac{50}{6} = 8 + \frac{1}{3}$

§. 96.

L. Nun wissen wir einen Bruch durch eine ganze Zahl, und eine ganze Zahl durch einen Bruch zu multipliciren (§. 94): wie wird aber ein Bruch durch einen Bruch, multiplicirt? Z. B. $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$?

S. $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$ multipliciren heisst $\frac{1}{2}$ ein halb Mal nehmen (§. 21); das gibt $\frac{1}{4}$.

L. Aber $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ heisst $\frac{1}{4}$ halb nehmen. Ein halbes Viertel aber ist $\frac{1}{8}$.

L. Und umgekehrt, $\frac{1}{2}$ multiplicirt durch $\frac{1}{4}$?

S. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ heisst den vierten Teil von $\frac{1}{2}$ nehmen; der macht auch $\frac{1}{8}$.

L. Also $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$;
und $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$;
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$:

Was gibt aber $\frac{1}{2}$ durch $\frac{2}{3}$ multiplicirt?

S. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = (\frac{1}{2} : 3) \times 2 = \frac{1 \times 2}{2 \times 3}$ (§. 83) $= \frac{2}{6}$.

L. Und $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{3}$?

S. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = (\frac{3}{4} : 3) \times 2 = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$.

L. Nun haben wir schon die Auflösung der Aufgabe: Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren. Welches ist sie?

S. Man multiplicirt Zähler durch Zähler, und Nenner durch Nenner.

Uebungs-Exempel.

$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{8 \times 2} = \frac{1}{16}$
$\frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
$\frac{4}{5} \times \frac{10}{11} = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$

§. 97.

L. „Einerlei Factoren geben, in veränderter Ordnung, doch einerlei Product.“ Gilt dieser, von ganzen Zahlen erwiesene Satz (§. 21) auch von Brüchen? Ist z. B., $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ eben so viel als $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$?

S. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$
und $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ (§. 96)

Aber $2 \times 4 = 4 \times 2$
und $3 \times 5 = 5 \times 3$ (§. 20);

folglich $\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ (S. §. 27);
folglich $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ (S. §. 32).

L. Und auf eben die Art läßt sich beweisen, daß auch $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5}$ ꝛc. Der obige Satz also gilt auch von Brüchen.

§. 98.

L. „Jeder Factor steckt so oft in dem Producte, als die Einheit in dem andern" (§. 21). Ein ächter Bruch aber enthält die Einheit nicht ganz (§. 21): folglich kan das Product auch den andern Factor nicht ganz enthalten. Multiplicirt man, z. B., 2 durch $\frac{1}{2}$; wie oft steckt der Factor 2 dan in dem Producte?

S. Nur ein halb Mal.

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = 2 : 2.$$

L. Und wenn man $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt::?

S. So steckt $\frac{3}{4}$ auch nur ein hab Mal in dem Producte:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} : 2.$$

L. Die Multiplication mit einem ächten Bruche also gibt ein kleineres Product, als der multiplicirte Factor. Und sind beide Factoren ächte Brüche, so ist das Product::?

S. Kleiner als jeder Factor.

L. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$,

und $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

Es erhellt hieraus, daß multipliciren nicht immer vermehren, oder gar vervielfältigen ist.

Division der Brüche.

§. 92.

L. Wie wird ein Bruch durch einen Bruch multiplicirt? z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$?

S. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

L. Multiplication und Division heben einander auf (§. 43). Wie wird nun $\frac{6}{12}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt?

S. $\frac{6}{12} : \frac{3}{4} = \frac{6 : 3}{12 : 4} = \frac{2}{3}$ (§. 43).

L. Und $\frac{6}{12}$ durch $\frac{2}{3}$?

S. $\frac{6}{12} : \frac{2}{3} = \frac{6 : 2}{12 : 3} = \frac{3}{4}$.

L. Es ist richtig. Wie aber, wenn, anstat des Bruches $\frac{6}{12}$, der ihm gleichgeltende $\frac{1}{2}$ durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren wäre?

S. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1 : 2}{2 : 3}$. Da findet keine wirkliche Division Stat: man müste denn $\frac{1}{2}$ in $\frac{6}{12}$ verwandeln.

L. Es gibt noch ein andres Mittel.

S. Mit dem umgekehrten Divisor zu multipliciren (§. 85):

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1 : 2}{2 : 3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

L. So ist es recht! — Und nun $\frac{1}{2}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt?

S. $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1 \times 4}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L. Wie wird nun ein Bruch durch einen Bruch dividirt?

S. Man multiplicirt den Dividendus durch den umgekehrten Divisor.

Uebungs-Exempel.

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12}$
b) $\frac{2}{5} : \frac{5}{6} = \frac{12}{25}$
c) $\frac{7}{8} : \frac{4}{9} = \frac{63}{32}$
d) $\frac{4}{9} : \frac{7}{8} = \frac{32}{63}$
e) $\frac{9}{10} : \frac{5}{8} = \frac{72}{50}$
f) $\frac{5}{4} : \frac{3}{8} = \frac{40}{12}$

§. 100.

L. Kan die Division aber ohne Rest geschehn, wie in $\frac{4}{15} : \frac{2}{3}$; so ist es besser, sie zu verrichten, als nach der Regel §. 99. zu verfahren: weil diese einen ungeschickten Bruch geben würde, den man erst aufzuheben genötigt wäre. — Wir wollen es auf beiderlei Art versuchen.

S. $\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{15 : 3} = \frac{2}{5}$

$\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{15 \times 2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

=

Uebungs Exempel.

a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{9 : 3} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{10} : \frac{2}{5} = \frac{4 : 2}{10 : 5} = \frac{2}{2}$

c) $\frac{8}{27} : \frac{4}{9} = \frac{8 : 4}{27 : 9} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{8}{36} : \frac{4}{9} = \frac{8 : 4}{36 : 9} = \frac{2}{4}$

e) $\frac{9}{10} : \frac{3}{5} = \frac{9 : 3}{10 : 5} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{15}{26} : \frac{5}{13} = \frac{15 : 5}{26 : 13} = \frac{3}{2}$

§. 101.

L. Noch eine andre Abkürzung findet Stat, wan Divisor und Dividendus einerlei Nenner haben, wie $\frac{9}{10} : \frac{3}{10}$. — Was wil man eigentlich durch die Division erforschen?

S. Wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist (§. 32).

L.

L. Um dieses aber zu erfahren, darf man, wenn beide einerlei Nenner, oder Namen haben, nur Zähler durch Zähler dividiren:

$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = 9 : 3 = 3$

Um uns von der Richtigkeit dieses Verfahrens noch mehr zu überzeugen, wollen wir eben diese Brüche nach §. 99 behandeln.

S. $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9 : 3}{10 : 10} = \frac{3}{1} = 3$

L. Und nach §. 98?

S. $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9 \times 10}{10 \times 3} = \frac{9}{3}$ (§. 87) $= \frac{3}{1}$ $= 3$ (§. 74).

L. Und $\frac{3}{10} : \frac{9}{10}$?

S. $\frac{3}{10} : \frac{9}{10} = 3 : 9$

Oder: $\frac{3}{10} : \frac{9}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 9}$ (§. 99) $= \frac{3}{9}$ (§. 86) $= \frac{1}{3}$ (§. 84).

L. Und $\frac{7}{10} : \frac{9}{10}$?

S. $\frac{7}{10} : \frac{9}{10} = 7 : 9$

Oder $\frac{7}{10} : \frac{9}{10} = \frac{7 \times 10}{10 \times 9} = \frac{7}{9}$.

L. Daraus, daß $\frac{3}{10} : \frac{9}{10} = 3 : 9$
und $= \frac{3}{9}$
desgleichen, daß $\frac{7}{10} : \frac{9}{10} = 7 : 9$
und $= \frac{7}{9}$
erhellt schon vorläufig, daß $3 : 9 = \frac{3}{9}$ und $7 : 9 = \frac{7}{9}$ (S. §. 31)

Wir werden bald mehr darüber sprechen (§. 103).

§. 102.

§. 102.

L. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, wissen wir schon. Z. B. $\frac{2}{3} : 2$?

S. $\frac{2}{3} : 2 \frac{\frac{2}{3} : 2}{} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3 \times 2}$ (§. 83).

L. Wie wird aber eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt? Z. B. $2 : \frac{2}{3}$?

S. $2 : \frac{2}{3} = \frac{2}{1} : \frac{2}{3}$ (§. 74) $= \frac{2 \times 3}{1 \times 2}$ (§. 83) $= \frac{6}{2}$.

L. Das heißt: Man multiplicirt den umgekehrten Divisor durch den Dividendus.

Uebungs-Exempel.

a) $3 : \frac{1}{4} = \frac{4 \times 3}{1} = 12$

b) $4 : \frac{3}{4} = \frac{4 \times 4}{3} = 1\frac{6}{3}$

c) $3 : \frac{6}{7} = \frac{7}{6 : 3} = \frac{7}{2}$

d) $4 : 3\frac{2}{3} = \frac{3}{3\,2 : 4} = \frac{3}{8}$

e) $4 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4 : 4} = 3$

f) $4 : 1\frac{2}{25} = \frac{25}{12 : 4} = 2\frac{5}{3}$

§. 103.

L. Es ist noch zu zeigen, daß gewisse, von ganzen Zahlen erwiesene, Divisions-Sätze, auch von Brüchen gelten. Zum Beispiel:

$$D : d = Q : 1$$

Was bedeutet das?

S. „Der Divisor steckt so oft im Dividendus, als die Einheit im Quotienten“ (§. 33).

L. Wir wollen das einmal an $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ versuchen.

S. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{4}$ (§. 99) $= \frac{3}{2}$ (§. 84) $= 1 + \frac{1}{2}$ (§. 76).

L. Und $\frac{3}{2} : 1$, was gibt das?

S. $\frac{3}{2} : 1 = \frac{\frac{3}{2} : 1}{}$ (§. 82) $= \frac{3}{2}$

L. Also $\frac{3}{2} = \frac{3}{2} : 1$

Folglich $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2} : 1$.

L. $D : d = Q : 1$ ist also auch von Brüchen wahr. In $\frac{3}{4}$ steckt der Divisor $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ oder anderthalb Mal; und in dem Quotienten $1 + \frac{1}{2}$ steckt die Einheit::?

S. Auch anderthalb Mal.

L. Umgekehrt: $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : 1$. Hier steckt der Divisor nicht ganz in dem Dividendus, sondern nur zwei Dritteile von ihm: und eben so steckt auch die Einheit nicht ganz in dem Quotienten; sondern nur zwei Dritteile von ihr.

§. 104.

L. $D : Q = d : 1$;

Was heisst das?

S. „Der Quotient steckt so oft im Dividendus, als die Einheit im Divisor“ (§. 33).

L.

L. Die Wahrheit davon wollen wir an den Brüchen $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ prüfen.

S. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3}$ (§. 99) $= \frac{8}{9}$

$\frac{8}{9} : 1 = \frac{8}{9}$;

$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9} : 1$ (S. §. 31).

L. Aber „der Dividendus ($\frac{2}{3}$), durch den Quotienten ($\frac{8}{9}$) dividirt," was gibt das?

S. „Den Divisor" (§. 33).

L. Und wie wird es bewiesen?

S. $\frac{8}{9} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3}$ (oben)

$\frac{2}{3} : \frac{8}{9} = \frac{2}{3} : \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 4} = \frac{3}{4}$ (§. 87).

L. Also $D : Q = d : 1$
und $D : Q = d$
gelten auch von Brüchen.

§. 105.

L. $D : Q = d$ (§. 104): was gibt aber $Q \times d$?

S. $Q \times d = D$. „Der Quotient durch den Divisor multiplicirt, gibt den Dividendus" (§. 43).

L. Daß dieses auch von Brüchen wahr sei, muß bewiesen werden. — Es sei, wie vorhin

$$D = \frac{2}{3},\ d = \frac{3}{4};$$

$$Q = \frac{8}{9}$$

S. $Q \times d = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = (\frac{2}{3} : \frac{3}{4}) \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 \times 3}{3 \times 3 \times 4} = \frac{2}{3}$ (§. 87).

L. Also auch $Q \times d = D$ ist von Brüchen wahr.

§. 106.

L. Es sei ein Product $= F \times f$; so ist

$$\left.\begin{array}{l}(F \times f) : F = f \\ \text{und}\quad (F \times f) : f = F\end{array}\right\} \text{(§. 44)};$$

Was heißt das?

S. „Ein Product durch einen Factor dividirt, gibt den andern" (§. 44).

L. Dieses wollen wir an den Brüchen $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ zeigen.

S. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ (§. 96) $= \frac{8}{15}$

a) $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} : \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 3}{3 \times 5 \times 2}$ (§. 99) $= \frac{4}{5}$ (§. 87)

b) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} : \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 4}$ (§. 99) $= \frac{2}{3}$ (§. 87).

L. Also (F × f) : F = f, und (F × f) : f = F gilt auch von Brüchen.

§. 107.

L. Der Quotient zeigt an, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist (§. 32). Kan nun wol, wenn der Divisor eine ganze Zahl ist, der Quotient gröſſer seyn, als der Dividendus?

S. Nein: denn wenn ich auch den möglichkleinsten Divisor, 1, nehme; so kan er doch nicht öfter im Dividendus enthalten seyn, als die Einheit; und der Quotient ist dem Dividendus gleich. Z. B. 2 : 1 = 2; 3 : 1 = 3 ꝛc.

L. Wenn aber der Divisor ein ächter Bruch ist, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc.; wie ist dan der Quotient? Ist er gröſſer als der Dividendus? oder ist er kleiner?

S. Das muß ich erst untersuchen:

$2 : \frac{1}{2} = 4$

$1 : \frac{1}{2} = 2$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{16} : \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Umgekehrt:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{16} = 8$

$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1$

$\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$

$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

u. s. w.

L. Das Resultat also ist::?

S. Die Division durch einen ächten Bruch gibt einen grössern Quotienten, als der Dividendus war.

L. Aber woher kömt das? Wie läßt sich das erklären?

S. Wenn ich, bei unverändertem Dividendus, den Divisor vermindere, so wächst der Quotient (§. 34). Ist der Divisor 1, so ist der Quotient dem Dividendus gleich. Ein ächter Bruch aber ist kleiner als 1 (§. 73). Ist daher der Divisor ein ächter Bruch, so wird der Quotient grösser als der Dividendus.

$8 : 4 = 2$

$8 : 2 = 4$

$8 : 1 = 8$

$8 : \frac{1}{2} = 16$

$8 : \frac{1}{4} = 32$

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4$

L. Die Erklärung ist richtig: aber läßt sich nicht auch aus der Multiplication eine herleiten?

S. Ja. Die Multiplication mit einem ächten Bruche gibt ein kleineres Product, als der multiplicirte Factor (§. 98). Da nun Multiplication und Division einander entgegen stehn, oder einander aufheben (§. 43); so muß die Division mit einem ächten Bruche einen gröſſern Quotienten geben, als der Dividendus, oder das Product (§. 43).

Ver-

Vergleichung der Brüche und Quotienten.

§. 108.

L. Was bedeutet 1 : 3?

S. Daß 1 durch 3 soll dividirt, oder 1 in 3 gleiche Teile geteilt werden soll (§. 34, 46).

L. Und $\frac{1}{3}$ bedeutet : :?

S. Den dritten Teil von 1 (§. 72).

L. Also 1 : 3 und $\frac{1}{3}$ sind gleichbedeutende Ausdrükke. Und eben so ist es mit 1 : 4, und $\frac{1}{4}$; mit 1 : 5, und $\frac{1}{5}$ u. s. w. Es läßt sich dieses auch so beweisen:

$1 : 3 = \frac{1}{1} : \frac{3}{1}$ (§. 74) $= \frac{1}{1} \times \frac{1}{3}$ (§. 97) $= \frac{1}{3}$.

Was bedeutet aber ein Quotient, wie 2 : 3?

S. Daß 2 durch 3 zu dividiren, oder in 3 gleiche Teile zu teilen ist.

L. Und $\frac{2}{3}$ bedeutet : :?

S. Der dritte Teil von 1 zwei Mal genommen (§. 72).

L. Nun ist die Frage: Welches ist mehr: der dritte Teil von 2, (2 : 3)? oder zwei Dritteile von 1, $(\frac{2}{3})$?

S. Das kömt auf eins heraus. Ein Dritteil von 2 ist so viel als zwei Dritteile von 1.

L. Also $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Das läßt sich auch so beweisen:

$2 : 3 = \frac{2}{1} : \frac{3}{1}$ (§. 74) $= \frac{2}{1} \times \frac{1}{3}$ (§. 97) $= \frac{2}{3}$

Und eben so läßt sich beweisen, daß $3 : 3 = \frac{3}{3}$; $4 : 3 = \frac{4}{3}$; $2 : 4 = \frac{2}{4}$, $3 : 4 = \frac{3}{4}$, $4 : 4 = \frac{4}{4}$, $5 : 4 = \frac{5}{4}$ u. s. w. Mit einem Worte: Quotienten sind Brüchen gleich, die zum Zähler den Dividendus, und zum Nenner den Divisor haben. Und ein Gleiches gilt von DivisionsResten (§. 46); denn auch sie sind Quotienten, und Teile von Quotienten (§. 46). Es gilt also alles, was von Brüchen gelehrt ist, auch von Quotienten; und was von Quotienten gelehrt ist, von Brüchen. Um dieses besser einzuprägen, wollen wir alle hieher gehörigen Sätze, der Reihe nach, durchgehn, und Quotienten durch $D : d$, oder Q; Brüche durch $\frac{D}{d}$, ganze Zahlen aber durch n bezeichnen.

§. 109.

L. Zuerst also:

$$\frac{2 \times 4}{3} = \frac{2}{3} \times 4 \text{ (§. 78).}$$

Mit Buchstaben:

$$\frac{Dn}{d} = \frac{D}{d} n$$

Was bedeutet das?

S. Multiplication des Zählers durch eine ganze Zahl, ist Multiplication des Bruches durch dieselbe.

L. Und nun die Zeichen geändert, so daß aus Bruch Quotient werde?

S. $Dn : d = (D : d)\ n$, oder Qn.

L. Und das heisst::?

S. Multiplication des Dividendus durch eine ganze Zahl, ist Multiplication des Quotienten durch dieselbe.

L. Um dieses durch ein Beispiel anschaulich zu machen, sei $D = 8$, $d = 2$, $n = 3$.

S. So ist $Dn : d = (8 \times 3) : 2 = 24 : 2 = 12$

und $(D : d)\ n = (8 : 2) \times 3 = 4 \times 3 = 12$.

L. Nun wollen wir's umkehren, und $D = 2$, $d = 8$ annehmen; n mag 3 bleiben.

S. Dan ist $Dn : d = (2 \times 3) : 8 = \frac{6}{8}$
und $(D : d)\ n = (2 : 8) \times 3 = \frac{2}{8} \times 3 = \frac{6}{8}$.

L. Also $\frac{(D : d)\ n = \frac{6}{8} = Dn : d}{(D : d)\ n \text{ oder } Qn = Dn : d}$

(S. §. 31)

§. 110.

L. $\frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{3} : 4$ (§. 79)

Mit Buchstaben: :?

S. $\frac{D}{dn} = \frac{D}{d} : n$

L. Was heisst das?

S. Multiplication des Nenners mit einer ganzen Zahl, ist Division des Bruches.

L. Nun den Bruch in einen Quotienten verwandelt!

S. $D : dn = (D : d) : n = Q : n$ Multiplication des Divisors mit einer ganzen Zahl, ist Division des Quotienten durch dieselbe.

L. Ein Beispiel in Zahlen.

Es sei $D = 12$; $d = 2$; $n = 3$.

S. So ist $D : dn = 12 : (2 \times 3) = 12 : 6 = 2$

und $(D : d) : n = (12 : 2) : 3 = 6 : 3 = 2$.

§. 111.

L. $\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 84).

Mit Buchstaben: :?

S. $\frac{Dn}{dn} = \frac{D}{d}$:

heißt: Multiplication des Zählers und Nenners durch einerlei ganze Zahl, läßt den Wert des Bruches ungeändert.

L. Diese auf Quotienten angewendet: :?

S. Dn : dn = D : d

Multiplication des Dividendus und des Divisors mit einerlei ganzen Zahl, läßt den Quotienten ungeändert.

L. Es sei D = 4, d = 2, n = 3.

S. So ist D : d = 4 : 2 = 2

Dn : dn = (4 × 3) : (2 × 3) =

12 : 6 = 2

§. 112.

L. $\left.\begin{matrix}\frac{2:4}{3} = \frac{2}{3} : 4 \\ \frac{2}{3:4} = \frac{2}{3} \times 4\end{matrix}\right\}$ (§. 83).

Mit Buchstaben: :?

S. $\frac{\frac{D:n}{d}}{} = \frac{D}{d} : n$;

und $\frac{D}{\frac{d:n}{}} = \frac{D}{d} n$.

Division des Zählers durch eine ganze Zahl, ist Division des Bruches; Division des Nenners dadurch, ist Multiplication desselben.

L. Auf Quotienten angewandt!

S. (D : n) : d = (D : d) : n = Q : n
und D : (d : n) = (D : d) n = Qn.

Division des Dividendus durch eine ganze Zahl, ist Division des Quotienten; und Division des Divisors durch dergleichen, ist Multiplication des Quotienten.

L. Es sei D = 16, d = 4, n = 2
S. So ist (D : n) : d = (16 : 2) : 4 =
8 : 4 = 2;
und (D : d) : n = (16 : 4) : 2 =
4 : 2 = 2.
Ferner D : (d : n) = 16 : (4 : 2) = 16 : 2 = 8;
und (D : d) n = (16 : 4) × 2 = 4 × 2 = 8.

§. 113.

L. $\frac{2}{4} : \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$ (§. 84).
Mit Buchstaben : : ?
S. $\frac{D : n}{d : n} = \frac{D}{d}$.
Division des Zählers und Nenners durch einerlei ganze Zahl, lässt den Wert eines Bruches ungeändert.

L. Auf Quotienten angewandt!
S. (D : n) : (d : n) = D : d
Division des Dividendus und des Divisors durch einerlei ganze Zahl, lässt den Wert des Quotienten ungeändert.

L. Es sei D = 480, d = 20, n = 2.
S. So ist 480 : 20 = (480 : 10) : (20 : 10)
= 48 : 2 = (48 : 2) : (2 : 2)
= 24 : 1 = 24

L. Die Divisions-Abkürzung, welche §. 45 schon in Ausübung gebracht ist, wird hier erwiesen und erweitert. Dort wurde nur gelehrt, Nullen am Ende wegzustreichen, das ist, Divisor und Dividendus durch 10, durch 100 ꝛc. zu dividiren. Hier ist es gleich viel, womit beide dividirt werden, wenn es nur eine und dieselbe Zahl ist. Es sei, z. B.; 578 durch 14 zu dividiren.

S. 578 : 14 = (578 : 2) : (14 : 2)
= 289 : 7 = 41 + $\frac{2}{7}$

Von

Von unreinen Brüchen.

§. 114.

L. a) $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 : 2}{4}$ (§. 83) $= \frac{\frac{3}{2}}{4}$ (§. 106).

b) $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3 : 2}$ (§. 82) $= \frac{\frac{2}{3}}{2}$ (§. 106).

c) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2 : 5}{3 : 7}$ (§. 97) $= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$ (§. 106).

Da haben wir

a) einen Bruch mit gebrochenem Zähler;
b) einen Bruch mit gebrochenem Nenner,
und c) einen Bruch mit gebrochenem Zähler und Nenner.

Man nennt sie, mit einem gemeinschaftlichen Namen, unreine, oder gebrochene, oder Doppel-Brüche. Ihre Entstehung zeigt ihre Bedeutung. Z. B. der Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, was wil der eigentlich sagen?

S. $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1 : 2}{4} = \frac{1}{4} : 2$ (§. 82) $= \frac{1}{4 \times 2}$ (§. 83) $= \frac{1}{8}$.

L. Also $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ist so so viel als ein ein halbes Viertel, oder ein Achtel. Was ist aber $\frac{\frac{3}{4}}{5}$?

S. $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4 : 5} = \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$ (§. 83) $= \frac{15}{4}$.

L. Und $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$?

S. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1 : 2}{1 : 3} = \frac{1}{1} : \frac{2}{3}$ (§. 97) $= \frac{1 \times 3}{1 \times 2}$ (§. 97) $= \frac{3}{2}$.

L.

L. Und $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{9}}$?

S. $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{9}} = \frac{4}{8} : \frac{5}{9} = \frac{4 \times}{8 \times 5} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$ (§ 86).

L. Wir wissen also nun unreine Brüche aufzulösen, oder in reine zu verwandeln, und werden nicht, wie sogar in manchen RechenBüchern geschiht, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ und $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$, oder $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ und $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ mit einander verwechseln.

S. $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$ (oben); und $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$.

$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

§. 115.

L. $D : d = \frac{D}{d}$ (§. 106). Findet dieses auch auf Brüche Anwendung? Z. B., Ein Bruch-Quotient $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ ist der dem DoppelBruche $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ gleich?

S. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{4} : \frac{3}{5}$ (§. 106) $= (2 : 3) : (4 : 5)$ (§. 106) $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ (§. 106)

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ (G. §. 32).

L. Ein unreiner Bruch also ist einem BruchQuotienten gleich, der zum Dividen-

dus

dus den Zähler, und zum Divisor den Nenner des DoppelBruches hat. Das gibt eine neue Auflösung dieser Brüche, als die des vorigen Paragraphs. Wie lässt sich der DoppelBruch $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{9}}$ nach dieser lezten Art auflösen?

S. $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{9}} = \frac{4}{5} : \frac{8}{9} = \frac{4 \times 9}{5 \times 8}$ (§. 97) $= \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$.

L. Und so auch $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, $\frac{3}{\frac{4}{5}}$ ꝛc.

S. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 : \frac{4}{5} = \frac{15}{4}$

§. 116.

L. „Multiplication des Zählers durch eine ganze Zahl ist Multiplication des Bruches (§. 78); und Multiplication des Nenners durch dergleichen ist Division des Bruches" (§. 97): gilt dieses auch von gebrochenen Zahlen? Das heisst: Ist $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{3}$ so viel als $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$? und $\frac{2}{3 \times \frac{4}{5}}$ gleichbedeutend mit $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$?

S. $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{3} = \frac{\frac{2 \times 4}{5}}{3}$ (§. 95) $= \frac{(2 \times 4) : 5}{3}$ (§. 108) $= \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ (§. 83) $= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (§. 96).

L. Mit dem ersten Teil des Beweises sind wir fertig. Nun den zweiten, daß $\frac{2}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$!

S. $\frac{2}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3 \times 4}}{5}$ (§. 95) $= \frac{2}{(3 \times 4) : 5}$ (§. 108)
$= \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$ (§. 83) $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ (§. 99).

L. Also $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$)
und $\frac{2}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$) (S. §. 32).

Das heißt: :?

S. Multiplication des Zählers durch einen Bruch ist Multiplication; und Multiplication des Nenners durch einen Bruch ist Division.

§. 117.

L. Aber ist auch a) $\frac{2 : \frac{4}{5}}{3} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$?
und b) $\frac{2}{3 : \frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$?

S. a) $\frac{2 : \frac{4}{5}}{3} = \frac{\frac{2 \times 5}{4}}{3}$ (§. 102) $= \frac{(2 \times 5) : 4}{3}$
(§. 108) $\frac{2 \times 5}{3 \times 4}$ (§. 83) $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ (§. 85).

b) $\frac{2}{3 : \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3 \times 5}}{4}$ (§. 102) $= \frac{2}{(3 \times 5) : 4}$
(§. 108) $= \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ (§. 83) $= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (§. 96).

L. Also $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
und $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (S. §. 32).

Das heißt : : ?

S. Division des Zählers durch einen Bruch ist Division; und Division des Nenners durch dergleichen ist Multiplication.

§. 118.

L. Nun kömt es noch drauf an, ob auch

a) $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{3}$;

und b) $\frac{2 : \frac{4}{5}}{3 : \frac{4}{5}} = \frac{2}{3}$?

S. a) $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2 \times 4}{5}}{\frac{3 \times 4}{5}}$ (§. 95) $= \frac{(2 \times 4) : 5}{(3 \times 4) : 5}$

(§. 108) $= \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$ (§. 84) $= \frac{2}{3}$ (§. 80)

b) $\frac{2 : \frac{4}{5}}{3 : \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2 \times 5}{4}}{\frac{3 \times 5}{4}}$ (§. 102) $= \frac{(2 \times 5) : 4}{(3 \times 5) : 4}$

(§. 108) $= \frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ (§. 84) $= \frac{2}{3}$ (§. 80).

L.

L. Was ist nun erwiesen?

S. Zähler und Nenner eines Bruches durch einerlei Bruch multiplicirt, oder dividirt, läßt dessen Wert ungeändert.

§. 119.

L. Es ist also
$$\left.\begin{aligned}\frac{2\times\frac{4}{5}}{3} &= \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\\ \frac{2}{3\times\frac{4}{5}} &= \frac{2}{3}:\frac{4}{5}\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 116)$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{2:\frac{4}{5}}{3} &= \frac{2}{3}:\frac{4}{5}\\ \frac{2}{3:\frac{4}{5}} &= \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 117)$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{2\times\frac{4}{5}}{3\times\frac{4}{5}} &= \frac{2}{3}\\ \frac{2:\frac{4}{5}}{3:\frac{4}{5}} &= \frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 118).$$

Da nun Brüche Quotienten gleich sind, so gelten die Sätze § 109, 110, 111, 112, 113, auch wenn man für ganze Zahlen, gebrochene daselbst setzt: oder, in den daselbst gebrauchten Formeln, n für einen Bruch annimt.

Dn

Dn : d = Qn (§ 109)
heißt: : ?

S. Multiplication des Dividendus durch eine gebrochene Zahl, ist Multiplication des Quotienten durch dieselbe.

L. Und D : dn = Q : n (§. 110)?

S. Multiplication des Divisors durch eine gebrochene Zahl, ist Division des Quotienten durch dieselbe.

L. Und (D : n) : d = Q : n)
D : (d : n) = Qn) (§. 112)?

S. Division des Dividendus durch eine gebrochene Zahl ist Division des Quotienten; und Division des Divisors durch dergleichen, ist Multiplication des Quotienten.

L. Dn : dn = Q (§ 111)
(D:n):(d:n)= Q (§. 113)?

S. Multiplication oder Division des Dividendus und Divisors, durch einerlei ge-

gebrochene Zahl, lässt den Quotienten unverändert.

L. Alle Sätze also, welche von Quotienten und ganzen Zahlen erwiesen sind, gelten auch von Quotienten und gebrochenen Zahlen.

Arithmetik.

Drittes Buch

Rechnung mit entgegen gesetzten Grössen, und mit Buchstaben.

Einleitung, §. 120.
Addition, §. 123.
Subtraction, §. 128.
Multiplication, §. 138.
Division, §. 145.
Brüche, §. 152.

Die vier RechnungsArten mit entgegen gesetzten Grössen, und mit Buchstaben.

Einleitung.

§. 120.

L. Wenn ich 7 Taler bar, und 3 Taler ausstehn, und keine Schulden habe: wie hoch beläuft sich dan mein Vermögen?

S. Auf 10 Taler.

L. Wenn ich aber 7 Taler habe, und 3 Taler schuldig bin?

S. Dan werden 3 Taler des baren Vermögens durch Schulden verschlungen, und es bleiben nur 4 Taler eigentliches Vermögen übrig.

L. Gesetzt aber, ich hätte 7 Taler bar, und 7 Taler Schulden?

S. Dan ginge Eins gegen das Andere auf, und es bliebe nichts, weder Vermögen noch Schulden.

L. Wenn aber Jemand 7 Taler bar, oder ausstehn hat, und 10 Taler schuldig ist?

S. Der ist 3 Taler mehr schuldig, als er besitzt.

L. Recht! Und man kan von ihm sagen, sein VermögensStand sei verneinend, oder weniger als nichts. — Und wenn ein Schiff 12 Meilen vorwärts gesegelt, durch Sturm aber 4 Meilen wieder zurükk getrieben ist: wie viel hat das gewonnen?

S. Nicht mehr als 8 Meilen.

L. Solche Grössen nun, die einander entgegen stehn, aufheben, oder vernichten, wie Vermögen und Schulden, vorwärts gehn, und rükkwärts gehn, heissen entgegen gesetzte Grössen. Eine derselben, und zwar welche man wil, heisst positiv, oder bejahend; die ihr entgegen stehende aber negativ, oder verneinend. Nimt man, z. B., Vermögen für bejahend an; so sind Schulden verneinendes Vermögen: nimt man aber Schulden für bejahend an; so ist Vermögen verneinende Schuld.

§. 121.

L. Zu Bezeichnung positiver Grössen pflegt man sich des AdditionsZeichens (+); und zu Bezeichnung negativer des SubtractionsZeichens (—), zu bedienen. Zum Beispiel:

$$+7+3=+10$$

bedeutet: Positiv 7, mehr positiv 3, ist gleich positiv 10. Und

$$+7-3=+4$$

heisst: :?

S. Positiv 7 mehr negativ 3 ist gleich positiv 4.

L. Recht! Und eine unbezeichnete Grösse gilt für positiv. Man pflegt daher, wo keine Zweideutigkeit zu besorgen ist, die positive Bezeichnung wegzulassen, wie z. B. zu Anfange einer Formel, nach einem GleichheitsZeichen, oder nach einer Klammer, und auch da nicht immer. Wir wollen uns aber vor der Hand dieser Abkürzung nicht bedienen.

§. 122.

L. Zu Bezeichnung der Grössen im Allgemeinen, bedient man sich auch der Buchstaben, vornehmlich der kleinen lateinischen, a, b, c, ꝛc;

zu-

zuweilen auch der grossen, A, B, C ꝛc. Ein solcher Buchstabe nun kan alle mögliche Grössen vorstellen; z. B. eine Zahl, eine Münze, ein Maß, oder was man wil: doch muß ein Buchstab die ihm einmal angewiesene Bedeutung behalten, bis es anders bestimmt wird. Man kan diesen Buchstaben auch Zahlen zugesellen:

1 a, 2 a, 3 a ꝛc.
1 b, 2 b, 3 b ꝛc.

Solche den Buchstaben unmittelbar vorgesetzte Zahlen heissen Coefficienten. Dabei ist zu merken, daß man den Coefficienten 1 gewöhnlich weglässt, und anstat 1 a, 1 b, 1 c zu schreiben pflegt: a, b, c.

I. Addition.

§. 123.

L. Wer die angeführten Fälle (§. 120) wohl verstanden, und gegenwärtig hat, der weiß entgegen gesetzte Grössen zu addiren. Zur Uebung wollen wir indeß noch eine Reihe Exempel hersetzen, und sie so ordnen, daß die noch etwanigen Schwierigkeiten sich von selbst heben.

L.			S.
+ 4	+	+ 4	= + 8
4	+	+ 3	= 7
4	+	+ 2	= + 6
4	+	+ 1	= 5
4	+	+ 0	= 4
4	+	— 1	= 3
4	+	— 2	= 2
4	+	— 3	= + 1
4	+	— 4	= 0
4	+	— 5	= — 1
4	+	— 6	= — 2
4	+	— 7	= — 3
4	+	— 8	= — 4
3	+	— 8	= — 5
2	+	— 8	= — 6
1	+	— 8	= — 7
0	+	— 8	= — 8
— 1	+	— 8	= — 9
— 2	+	— 8	= — 10
— 3	+	— 8	= — 11
— 4	+	— 8	= — 12

L. Aus diesen Exempeln kan man sich die Regeln der Addition entwikkeln. Die zu addirende Grössen haben entweder gleiche, oder ungleiche Zeichen. Haben sie gleiche Zeichen, wie

+ 4 + + 3,

oder — 4 + — 3 : : ?

S. So zählt man sie zusammen wie in der gewöhnlichen Addition (§. 13), und gibt der Summe das Zeichen der addirten Grössen.

$$+4 + +3 = +7$$
$$-4 + -3 = -7.$$

L. Haben die Grössen aber entgegen gesetzte Zeichen, wie

$$+4 + -6,$$

oder $-4 + +6$: : ?

S. So enthält die Summe bloß den Ueberschuß der grössern über die kleinere, und bekömt die Bezeichnung der grössern.

$$+4 + -6 = -2,$$
$$-4 + +6 = +2.$$

L. Wenn aber beide einander entgegen gesetzte Grössen gleich groß sind, wie

$$+4 + -4?$$

S. So heben sie sich einander.

$$+4 + -4 = 0.$$

§. 124.

Wer es sonderbar finden möchte, daß ich

$$4 + -1,\ 4 + -2 \text{ ꝛc.}$$

schreibe, dem gebe ich zu bedenken, daß hier von Addition die Rede ist, und daß kein Anfänger

$$4 - 1,\ 4 - 2 \text{ ꝛc.}$$

wie man gewöhnlich schreibt, für Additions-Exempel halten

ten würde (§. 28). Weiter unten (§. 131) werde ich mehr darüber sagen.

§. 125.

L. Es können auch mehr als zwei Grössen auf ein Mal addirt werden. Z. B. + 8, und + 14, und — 9, wie viel betragen die zusammen?

S. 8 + 14 + — 9 = 22 + — 9 = 13.

L. Aber + 523, und + 2725, und — 316, und + 913, und — 407?

S. 523 +
2725 + — 316
913 + — 407

+ 4161 + — 723 = 3438

L. Das ist richtig. Es hätte auch so stehn können:

+ 2725 + — 316 = 2409
913 + — 407 = 506
523
3438

§. 126.

§. 126.

Auch mit unbestimmten Grössen, oder Buchstaben, lassen sich alle arithmetische Verrichtungen vornehmen, wie mit Zahlen. So kan man, z. B., addiren:

1 a + + 1 a, oder a + a = 2 a
2 a + + 3 a = 5 a
3 b + + 4 b + b = 8 b
5 b + − 3 b = 2 b
− 4 c + − 5 c = − 9 c
− 5 d + − 2 d + d = − 6 d.

Ungleichartige Grössen aber, wie a und b, a und c, u. s. w. lassen sich nicht anders als durch DazwischenSetzung des AdditionsZeichens addiren. Z. B. 3 a und 2 b addirt = 3 a + 2 b. — Wie aber werden 3 a und 4 b addirt?

S. Das weis ich nicht.

L. Wie viel machen 3 Taler und 4 Groschen zusammen? Machen sie 7 Taler, oder 7 Groschen?

S. Weder 7 Taler, noch 7 Groschen; sondern 3 Taler + 4 Groschen.

L. Eben die Bewandniß hat es mit durch verschiedene Buchstaben ausgedrükkte Grössen. 3 a und 4 b können nicht anders addirt werden, als durch DazwischenSetzung des Zeichens:

3 a + 4 b

Aber zusammengesetzte Grössen, wie 3 a + 4 b, und 4 a + — 2 b, wie werden die addirt?

S. Man wird sie müssen unter einander setzen:

$$\begin{array}{r} 3a + + 4b \\ 4a + - 2b \\ \hline \text{Summe } 7a + + 2b \end{array}$$

L. Recht. Zusammen gesetzte Grössen zu addiren, setzt man so, so daß gleiche Buchstaben unter einander kommen, und zählt dan die Coefficienten zusammen. —

Uebungs Exempel.

I.

$$\begin{array}{r} a + + b \\ a + - b \\ \hline 2a \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} 7a + - 5b + - 6c \\ -2a + + 3b + - 4c \\ \hline +5a + - 2b + - 10c \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{r} a + + 2b + - 3c + - 5d \\ 3a + - 2b + + 6c + + 2d \\ \hline 4a + + 3c + - 3d. \end{array}$$

IV.

IV.

$$\begin{array}{l} 7a + + 4b + - 3c + - 4d + + 6e + - f \\ 2a + - 5b + - 4c + + 6d \quad + + 2f \\ \hline 9a + + b + - 7c + \quad 2d + \quad 6e + \quad f \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{l} a + + 2b + - 3c + - 3d \\ \quad - 3b + - 3c + + 5d + + \frac{1}{2}f \\ 17a + + 3b + - \quad c + - 8d + - f \\ \hline 18a + - 2b + - 7c + - 6d + - \frac{1}{2}f \end{array}$$

§. 127.

Das erste UebungsExempel:

$(a + b) + (a + - b) = 2a$ (§. 124)

enthält folgende Wahrheit zu ihrem Beweis: Zu der Summe zweier Zahlen $(a + b)$, ihr Unterschied $(a + - b)$ addirt, gibt die grössere Zahl doppelt.

Es sei $a = 9$,
$b = 5$;

so ist $a + b = 9 + 5 = 14$

$$\begin{array}{l} a + - b = 9 + - 5 = 4 \\ \hline (a + b) + (a + - b) = 14 + 4 = 18 = 9 \times 2 \end{array}$$

II. Subtraction.

§. 128.

L. Nun wollen wir die Subtraction versuchen, und von $+ 7$ abziehn $+ 3$!

S. $+ 7 - + 3 = + 4$.

L. Und von + 7 a abgezogen + 3 a?

S. + 7 a — + 3 a = + 4 a.

L. Und von — 7 a abgezogen — 3 a?

S. — 7 a — — — 3 a = — 4 a.

L. Und eben so:

— 7 — — — 3 = — 4

Aber von + 7 a abgezogen — 3 a, was gibt das?

S. : : :

L. Gesetzt ich hätte mein Vermögen und meine Schulden gegen einander berechnet, und gefunden, daß das Vermögen die Schulden um 7 Taler überstiege. Nun erläßt mir jemand eine Schuld von 3 Talern, oder bezahlt sie für mich: Verbessern oder verschlimmern sich meine Umstände dadurch?

S. Sie verbessern sich.

L. Und um wie viel?

S. Um so viel, als die Schulden vermindert sind; das ist um 3 Taler.

L. Recht! Wer mir 3 Taler Schulden abnimt, der verbessert mein Vermögen um 3 Taler. Eine verneinende Grösse abziehn ist also so viel: :?

S. Als eine bejahende addiren.

L. Was gibt also $+7 - -3$?

S. $+7 - -3 = +7 + +3 = +10$

L. Und $+7a - -3a = +7a + +3a = +10a$

Aber -7 weniger $+3$, was bleibt da übrig?

S. Wenn mein VermögensStand verneinend ist (-7), und man nimt mir noch 3 bare Taler ($+3$) weg; so wird mein negatives Vermögen um eben so viel vermehrt, als mir positives genommen wird.

$-7 - +3 = -7 + -3 = -10$

L. Oder $-7a - +3a = -7a + -3a = -10a$. Das heisst: Eine bejahende Grösse abziehn ist so viel als eine verneinende addiren. — Wie viel macht

$+3 + -3$

zusammen?

S. $+3 + -3 = 0$ (§. 122).

L. Recht! Also

$-7 + +3 + -3 = 7 + 0 = 7$

Nimt man hievon nun die $+3$ weg, was bleibt übrig?

S. $-7 + -3 = -10$.

L. Das ist richtig, und macht die gefundene Regel noch anschaulicher. Wir können nun beide Regeln in eine zusammen ziehn: Eine Grösse ab-

abziehn ist so viel als die ihr entgegen stehende addiren.

Uebungs-Exempel.

+6 — +3 = +3	−6 — −3 = −3
+6 — +4 = +2	−6 — −4 = −2
+6 — +5 = +1	−6 — −5 = −1
+6 — +6 = 0	−6 — −6 = 0
+6 — +7 = ?	−6 — −7 = ?
+6 — −3 = +9	−6 — +3 = −9
+6 — −4 = +10	−6 — +4 = −10
+6 — −5 = +11	−6 — +5 = −11
+6 — −6 = +12	−6 — +6 = −12
+6 — −7 = ?	−6 — +7 = ?

§. 129.

L. Wenn ich 6 Taler habe, und 6 Taler geben muß, so behalte ich nichts (§. 125). Aber gesetzt, ich hätte nur 6, und solte 7 bezahlen?

S. Dan bliebe ich 1 schuldig.

L. Und wenn ich 8 bezahlen solte?

S. So bliebe ich 2 schuldig.

L. Also $+6-+6=0 \quad =+6+-6$
$+6-+7=-1=+6+-7$
$+6-+8=-2=+6+-8$
$+6-+9=-3=+6+-9$ } §. 123

u. s. w.

Aber nun umgekehrt! Wenn ich 6 Taler schuldig bin, und mir wird diese Schuldenlast abgenommen; so ist mein Vermögen $=0$. Gesetzt aber, ich hätte nun 6 Taler Schulden, und jemand bezahlte 7 Taler für mich?

S. Das wäre so gut als ob er mir 7 Taler schenkte. Dan wären alle Schulden getilgt, und es wäre noch ein Taler übrig.

L. Und wenn er 8 Taler für mich bezahlte?

S. So blieben 2 Taler übrig.

L. Also $-6--6=0 \quad =-6++6$
$-6--7=+1=-6++7$
$-6--8=+2=-6++8$
$-6--9=+3=-6++9$ } §. 123

u. s. w.

Was kan man aus diesen Exempeln lernen?

S. Daß man grössere Zahlen von kleinern abziehn kan: und auch hier die Regel gilt: „Eine Grösse abziehn ist die entgegen stehende addiren" (§. 127).

§. 130.

L.			S.	L.			S.
+ 4	—	+ 4	= 0	— 4	—	+ 4	= — 8
+ 3	—	+ 4	= — 1	— 3	—	+ 4	= — 7
+ 2	—	+ 4	= — 2	— 2	—	+ 4	= — 6
+ 1	—	+ 4	= — 3	— 1	—	+ 4	= — 5
0	—	+ 4	= — 4	0	—	+ 4	= — 4
0	—	+ 3	= — 3	0	—	— 1	= + 1
0	—	+ 2	= — 2	0	—	— 2	= + 2
0	—	+ 1	= — 1	0	—	— 3	= + 3
0	—	0	= 0	0	—	— 4	= + 4

L. Was lehren diese Exempel?

S. Daß man auch von 0 subtrahiren kan.

L. Und 0 — + 4 = — 4 = 0 ∔ — 4
0 — — 4 = + 4 = 0 ∔ + 4 } §. 123.

Was lehrt das?

S. Daß auch hier die Regel gilt: „Eine Grösse abziehn ist die entgegen stehende addiren" (§. 127).

§. 131.

L. Nun sind alle erdenkliche SubtractionsFälle da gewesen. Man kan nämlich subtrahiren:

I. Gleiche Zeichen.

1) Kleineres von Grösserm.

$+7 - +3 = +4 = +7 + -3$

$-7 - -3 = -4 = -7 + +3$

2) Grösseres von Kleinerm.

$+3 - +7 = -4 = +3 + -7$

$-3 - -7 = +4 = -3 + +7$

II. Ungleiche Zeichen.

1) Kleineres von Grösserm.

$+7 - -3 = +10 = +7 + +3$

$-7 - +3 = -10 = -7 + -3$

2) Grösseres von Kleinerm.

$+3 - -7 = +10 = +3 + +7$

$-3 - +7 = -10 = -3 + -7$

III. Von Null.

1) Grösseres von Null.

$0 - +3 = -3 = 0 + -3$

2) Kleineres von Null.

$0 - -3 = +3 = 0 + +3$

Es erhellt aus obigen Exempeln, daß die Regel allgemein ist: „Eine Grösse abziehn ist die ihr entgegen stehende addiren.“ Jedes SubtractionsExempel also lässt sich in ein AdditionsExempel verwandeln. Wie geschiht das?

S. Wenn man in der abzuziehenden Grösse jedes Zeichen in das entgegen stehende verwandelt.

L. Recht! Und man kan oft vorteilhafte Anwendung davon machen. Zum Beispiel:

Von 3 a + — 2 b + + 4 c + — 5 d
subtr. 7 a + — 5 b + — 2 c + + 7 d + + 2 e + — f

ist eben so viel als : : ?

S. Zu 3a + — 2b + + 4c + — 5d
add — 7a + + 5b + + 2c + — 7d + — 2e + + f

m. + 4a + + 3b + + 6c + — 12d + — 2e + + f

L. Beim Subtrahiren kan man diese Umänderung in Gedanken verrichten. Zuweilen ist sie gar nicht nötig, wie beim ersten Fall (I, 1), wo bei gleicher Bezeichnung das Kleinere vom Grössern abzuziehn ist, wie:

von + 7a + + — 5b
abgezogen + 3a + + — 2b

S. Bleibt + 4a + + — 3b

L. Hier findet die Subtraction gar keine Schwierigkeit, und daher würde die ZeichenVerwandlung unnütz seyn.

§. 132.

L. Daß man das Zeichen +, in der Bedeutung positiv, zuweilen weglassen dürfe, wissen wir

schon (§. 121), es kan aber auch in der Mitte, als AdditionsZeichen, wegbleiben. Z. B.

für 7 + + 3 kan man 7 + 3
und für 7 + — 3 kan man 7 — 3
schreiben.

S. Ehemals bedeutete

7 — 3

7 weniger 3, oder 3 von 7 subtrahirt. Jetzt soll es bedeuten: 7 mehr negativ 3, oder zu 7 negativ 3 addirt. Ist das nicht ein Widerspruch?

L. Das wol geradezu nicht; indem

7 — + 3 = 7 + — 3 (§. 131).

S. Wenn es denn einerlei ist, wenn nämlich

7 — 3 = 7 — + 3

und auch 7 — 3 = 7 + — 3

warum wollen wir denn jetzt die SprechArt ändern, und für 7 weniger + 3, 7 mehr — 3 sagen?

L. Dazu zwingen uns die Exempel, wo die zu addirenden und zu subtrahirenden Grössen unter einander geschrieben sind, wie in §. 126, und §. 130. Wir wollen das zweite Exempel §. 126 noch ein Mal rechnen:

Zu + 7a + — 5b + — 6c
— 2a + + 3b + — 4c

+ 5a — 2b — 10c

Hier

Hier ist offenbar, daß die zunächst vor den Zahlen stehenden Zeichen positiv und negativ bedeuten, und daß diese nicht wegbleiben dürfen; wil man daher Zeichen weglassen, so können es keine andre als die AdditionsZeichen seyn. In der Summe ist dieses wirklich geschehn. Das ganze Exempel, auf diese Art geschrieben, würde so aussehen:

$$\begin{array}{r} 7a - 5b - 6c \\ -2a + 3b - 4c \\ \hline 5a - 2b - 10c \end{array}$$

Und eben so können auch die übrigen Exempel §. 125, und alle ähnliche Additions- und SubtractionsExempel geschrieben werden. —

§. 133.

L. Noch eine Schwierigkeit ist zu heben. Gesetzt, zu $7a - - 5b$ solte addirt werden $2a + 3b$?

$$\begin{array}{r} 7a - - 5b \\ 2a + + 3b \\ \hline 9a \quad - 2b \end{array}$$

L. Hier steht aber vor $- 5b$ ein Subtractions-, und vor $+ 3b$ ein AdditionsZeichen. Welches von beiden müste nun in der Summe stehn?

S. Das weis ich nicht.

L. Wie werden wir es denn machen? Gibt es kein Mittel, das doppelte SubtractionsZeichen in der obersten Reihe zu verändern?

S. Ja.

$7a - - 5b = 7a + + 5b$ (§. 131)

wofür man schreiben kan:

$7a + 5b$ (§. 132).

L. Das ist richtig. Und nun wollen wir obiges Exempel hiernach setzen:

S. $7a + 5b$

$2a + 3b$

$9a + 8b$

L. Und eben dieses subtrahirt?

S. $7a + 5b$

$2a + 3b$

$5a + 2b$

§. 134.

Der Gebrauch einerlei Zeichen in verschiedener Bedeutung, ist eine Unschiklichkeit welche nicht nur den Schüler, sondern sogar den Lehrer, welcher gern deutlich seyn möchte, in Verlegenheit setzen kan. Besser wäre es, meines Erachtens, dem Additions- und SubtractionsZeichen ihre ihnen angewiesene Bedeutung ausschlieslich zu lassen, und für positiv und negativ andere Zeichen zu gebrauchen. Ich schlage für Erstes ⊦ oder ⊢, für

für Leztes + oder ┐ vor. Das Exempel §. 131. würde den so aussehn:

r 7 a + ┐5b + ┐6 c.
┐ 2 a + r3b + ┐4 c.
r 5 a + ┐2b + ┐10 c.

Oder abgekürzt:

7a ┐5b ┐6c
+ (┐ 2a r3b ┐4c)
5a ┐2b ┐10 c.

Hier steht das AdditionsZeichen bloß zu Anfange der zweiten Zeile, um anzudeuten daß sie addirt werden soll. Bei SubtractionsExempeln könte man ihr das SubtractionsZeichen voransetzen;

7a ┐5b ┐6c
— (┐ 2a r3b ┐4c)
9a ┐8b ┐2c.

§. 135.

Sämtliche arithmetische Zeichen bedürften vielleicht einer Reform, denn ausser dem Fehler daß dreie derselben (+, —, :) in doppelter Bedeutung gebraucht werden, haben sie auch noch den, daß sie nicht charakteristisch sind. Wer sieht es, z. B., dem + und — an, daß sie entgegengesetzte, und dem — und :, daß sie verwandte Verrichtungen bezeichnen? Ich schlage daher,

zu

zu Bezeichnung der Addition, +
der Subtraction, —
der Multiplication, ·
der Division, :

vor: mag jedoch nicht der Erste seyn, der sich ihrer bedient.

§. 107.

L. Jezt, nachdem wir uns verständigt, und gelernt haben, daß

$$a - b = a + -b = a - + b \text{ (§. 132.)}$$

und $a + b = a + + b = a - - b$ (§. 133.)

jezt können wir uns ohne Besorgniß der Abkürzungen bedienen. Den Anfang mag das Exempel §. 131. machen.

Uebungs-Exempel.

I.

Von	7a	— 5b	— 6c.
abgezogen	— 2a	+ 3b	— 4c.
Bleibt	+ 9a	— 8b	— 2c.

II.

	a	+ 2b	— 3c	— 5d.
	3a	— 2b	+ 6c	+ 2d.
	— 2a	+ 4b	— 9c	— 7d.

III.

III.

$$\begin{array}{r} 7a - 5b - 3c - 4d + 6e - f \\ 2a - 5b - 4c + 6d \quad + 2f \\ \hline 5a \quad + c - 10d + 6e - 3f. \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{r} -5a + 2b \quad + d \\ +2a \quad + 7c + 2d - \frac{1}{4}e \\ \hline -7a + 2b - 7c - d + \frac{1}{4}e \text{ (§ 130).} \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{r} -a + b - 2c + 8d \\ -a + 2b + c - 3d + e - 25 \\ \hline -b - 3c + 11d - e + 25. \end{array}$$

VI.

$$\begin{aligned} &(a - b + c) - (d - e + f) \\ =&(a - b + c) - (+d - e + f) \text{ (§ 121).} \\ =&(a - b + c) + (-d + e - f) \text{ (§ 131).} \\ =&\ a - b + c - d + e - f \text{ (§. 132).} \end{aligned}$$

Man kan es auch so sehen.

$$\begin{array}{rr} \text{Von } a - b + c & \\ \text{abgezogen} & + d - e + f \\ \hline \text{Rest } a - b + c - d + e - f \text{ (§ 131).} & \end{array}$$

VII.

VII.

$$(5a+2b-c)-(2a-d+2e)$$
$$=(5a+2b-c)+(-2a+d-2e)\ (\S.\ 131)$$
$$=3a+2b-c\quad+d-2e\ (\S.\ 126)$$

Oder so:

Von $5a+2b-c$
abgezogen $2a\qquad-d+2e$

Rest $3a+2b-c+d-2e$.

VIII.

$$(a+b)-(a-b)$$
$$=(a+b)+(-a+b)\ (\S.\ 131.)$$
$$=a+b\quad-a+b=2b.$$

Oder so:

Von $a+b$
abgezogen $a-b$

Rest $2b$.

IX.

Von $9-3+2+5$
subtrahirt $6-2+4-1$

$3-1-2+6$.

Oder so:

$9-3+2+5=13$
$6-2+4-1=7$

6.

X.

X.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 26 & - & 8 & + & 16 & - & 4 & + 10 & = + 40 \\ -32 & + & 12 & - & 38 & + & 8 & & = - 50 \\ \hline + 58 & - & 20 & + & 54 & - & 12 & & = + 90. \end{array}$$

§. 137.

Das Subtractions-Exempel

$(a + b) - (a - b = 2b$ (§. 135, VIII.)

enthält folgende Wahrheit: Von der Summe zweier Gröſſen $(a + b)$, ihr Unterſchied $(a - b)$ weggenommen, gibt die weggenommene (b) doppelt.

Es ſei $a = 9$

$b = 5$

ſo iſt $a + b = 9 + 5 = 14$,

$a - b = 9 - 5 = 4$

$(a + b) - (a - b) = 14 - 4 = 10 = 5 + 5$

Oder umgekehrt: $a = 5$

$b = 9$

$a + b = 5 + 9 = 14$

$a - b = 5 - 9 = -4$

$(a + b) - (a - b) = 14 - -4 = 18$ (§132)

$= 9 + 9.$

III. Multiplication.

§. 138.

L. Grössen die einander aufheben, oder vernichten, wie nennt man die?

S. Entgegen gesetzte Grössen (§. 120).

L. So wie es Grössen gibt die einander entgegen stehn, so gibt es auch RechnungsArten welche einander vernichten oder aufheben. Welches sind die?

S. Addition und Subtraction; Multiplication und Division. (§ 31, 42).

L. Recht! Addition und Subtraction stehen einander entgegen, wie positiv und negativ. Subtraction ist verneinende Addition; und Addition ist verneinende Subtraction. Negativ addiren ist demnach so viel als subtrahiren; und negativ subtrahiren: :?

S. Ist so viel als addiren.

§. 139.

L. Multiplication ist verkürzte Addition (§. 15). Da es nun zweierlei Addition gibt (§. 137); so folgt daraus: :?

S. Daß es auch zweierlei Multiplication gebe.

L. Recht! Einerlei Gröſſe zwei, oder mehr Mal poſitiv zu ſich ſelbſt addiren, iſt poſitive Multiplication; und einerlei Gröſſe zwei, oder mehr Mal negativ zu ſich ſelbſt addiren, iſt negative Multiplication. — Zuerſt Beiſpiele bejahender Multiplication.

$$\left.\begin{matrix} +\ 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \end{matrix}\right\} \text{poſitiv addirt}$$

gibt $+\ 12 = +\ 4 \times +\ 3$.

Oder auch:

$$\left.\begin{matrix} -\ 4 \\ -\ 4 \\ -\ 4 \end{matrix}\right\} \text{poſitiv addirt}$$

gibt $-\ 12 = -\ 4 \times +\ 3$.

Das waren Beiſpiele bejahender Multiplication: nun auch welche von verneinender:

Negativ addirt
$$\begin{cases} 0 - + 4 = -\ 4 & (\S.\ 130) \\ -\ 4 - + 4 = -\ 8 & (\S.\ 128) \\ -\ 8 - + 4 = -\ 12 = +\ 4 \times -\ 3. \end{cases}$$

Oder:

Negativ addirt
$$\begin{cases} 0 - - 4 = +\ 4 & (\S.\ 130) \\ +\ 4 - - 4 = +\ 8 & (\S.\ 128) \\ +\ 8 - - 4 = +\ 12 = -\ 4 \times -\ 3 \end{cases}$$

Nun

Nun haben wir alle erdenkliche Fälle. Es sind deren viere; zweie bejahender, und zweie verneinender Multiplication. Wir wollen sie, zu bequemerer Uebersicht, alle viere neben einander stellen.

S. $+4 \times +3 = +12$
$-4 \times +3 = -12$
$+4 \times -3 = -12$
$-4 \times -3 = +12.$

L. Bei aufmerksamer Betrachtung dieser vier Fälle bemerkt man, daß sie sich auf zweie bringen lassen. Beide Factoren haben entweder einerlei Bezeichnung, wie im ersten und lezten Exempel; oder sie haben verschiedene, wie in den beiden mittelsten Exempeln. Da nun die beiden mittelsten Producte verneinend, die beiden äussern aber bejahend sind; so kan man sich hieraus die allgemeine MultiplicationsRegel ziehn: :?

S. Factoren mit einerlei Zeichen geben bejahende, und Factoren mit verschiedenen Zeichen geben verneinende Producte.

§. 140.

L. Es folgen nun MultiplicationsExempel, welche wir so ordnen wollen daß auch aus ihnen die Regeln der Multiplication hervorgehn. Wir wollen mit $+4 \times +3 = +12$ anfangen. — Wenn man

den

den ersten Factor + 4 um 1 vermindert, wie viel muß das folgende Product kleiner werden, als das vorige?

S. Um 3. Denn + 3 × + 3 = + 9 = 12 — 3.

L. Und eben so müssen die folgenden Producte abnehmen.

L.				S.
+ 4	×	+ 3	=	+ 12
+ 3	×	+ 3	=	+ 9 = 12 — 3
+ 2	×	+ 3	=	+ 6 = 9 — 3
+ 1	×	+ 3	=	+ 3 = 6 — 3
0	×	+ 3	=	0 = 3 — 3
— 1	×	+ 3	=	— 3 = 0 — 3
— 2	×	+ 3	=	— 6 — 3 — 3
— 3	×	+ 3	=	— 9 — 6 — 3
— 4	×	+ 3	=	— 12 — 9 — 3

L. Fängt man nun von vorn wieder an, und vermindert den zweiten Factor, wie vorhin den ersten, um wie viel wird dan jedes folgende Product kleiner werden, als das nächst vorhergehende?

S. Um 4. Denn + 4 × + 2 = + 8 = 12 — 4.

L. Recht! Und nun weiter.

S. $+4 \times +3 = +12$
$+4 \times +2 = +8 = 12 - 4$
$+4 \times +1 = +4 = 8 - 4$
$+4 \times 0 = 0 = 4 - 4$
$+4 \times -1 = -4 = 0 - 4$
$+4 \times -2 = -8 = -4 - 4$
$+4 \times -3 = -12 = -8 - 4.$

L. Nun wollen wir den Factor — 3 unverändert lassen, den + 4 aber um 1 vermindern, und damit fortfahren.

S. $+4 \times -3 = -12$
$+3 \times -3 = -9 = -12 + 3$
$+2 \times -3 = -6 = -9 + 3$
$+1 \times -3 = -3 = -6 + 3$
$0 \times -3 = 0 = -3 + 3$
$-1 \times -3 = +3 = 0 + 3$
$-2 \times -3 = +6 = +3 + 3$
$-3 \times -3 = +9 = +6 + 3$
$-4 \times -3 = +12 = +9 + 3$

§. 141.

Bei der ersten Ausgabe wünschte ich über diese meine Theorie der Multiplication, das Urteil Sachverständiger zu vernehmen. Dieses nun ist durchgängig günstig ausgefallen. Auffallend ist, daß mein Recensent in der LiteraturZeitung (1795, Nov.) behaupten

könne,

könne, zu meiner Einteilung der Addition und Multiplication in bejahende und verneinende sei kein Grund vorhanden, da doch meine ganze Theorie darauf gebaut ist.

§. 142.

L. Buchstaben, oder unbestimmte Grössen, z. B. a und b, durch einander zu multipliciren, kan man zwischen beide das MultiplicationsZeichen; oder auch beide ohne Zeichen neben einander setzen, je nachdem die Umstände dieses oder jenes vorteilhafter machen. So ist

a multiplicirt durch b = a × b = ab
ab multiplicirt durch c = ab × c = abc
ab multiplicirt durch ad = ab × ad = abad = aabd (§. 18).
4a multiplicirt durch 3 = 4a × 3 = (4 × 3) × a = 12 × a = 12 a
4a multiplicirt durch 3b = 4a × 3b = (4 × 3) × a × b = 12 ab
5ab multipl. durch 3cd = 5ab × 3cd = (5 × 3) × ab × cd = 15 abcd.

§. 143.

L. Wenn Factoren aus mehren Gliedern bestehn, so wissen wir schon aus der gemeinen Multiplication (§. 27. 28.), daß jedes Glied des einen Factors multiplicirt wird = = ?

S. Durch jedes Glied des andern.

L. So gibt z. B. a+b durch a multiplicirt = ?

S. $(a+b) \times a = aa + ab$

L. Ganz recht! Bei grössern Exempeln, wie $(a+b) \times (a+b)$ oder auch $(a+b+c) \times (a+b-c)$ ist es bequem, die Factoren, wie bei der gewöhnlichen Multiplication (S. 27, 28), unter einander zu schreiben:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \end{array}$$

Desgleichen

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b - d \end{array}$$

Da aber die Buchstaben nicht, wie die Ziffern, einen Wert von ihrer Stelle erhalten; so ist es gleichgültig, mit welchem Buchstaben man anfängt zu multipliciren; wie auch, ob man die einzelen Producte von der Linken gegen die Rechte, oder von der Rechten gegen die Linke schreibe.

Z. B. $(a+b+c) \times (a+b)$

kan man so stellen:

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b \\ \hline aa + ab + ac \\ + ab + bb + bc \\ \hline aa + 2ab + bb + ac + bc \end{array}$$

oder so:

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b \\ \hline + ab + bb + bc \\ + aa + ab + ac \\ \hline aa + 2ab + bb + ac + bc \end{array}$$

Die

Die erste Art, von der Linken gegen die Rechte zu schreiben, scheint indessen bequemer. Auch ist es vorteilhaft, die aus einerlei Buchstaben bestehenden Producte unter einander zu schreiben, weil das Summiren dadurch erleichtert wird: wie folgendes Exempel zeigt.

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b \\ \hline aa+ab+ac \\ +ab\quad +bb+bc \\ \hline aa+2ab+ac+bb+bc. \end{array}$$

§. 144.

Multiplications-Exempel zur Uebung.

I. $(a+b)\times(a-b)$

II. $(a+b+c)\times(a+b-c)$

III. $(a-b-c-dg)\times(a+b-c)$

IV. $(2a-3)\times(a+2)$

V. $(4aa-6a+9)\times(2a+3)$

VI. $(5-4+9)\times(7+6-8)$

Ausrechnung obiger Exempel.

I. $\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ -ab - bb \\ \hline aa \quad - bb. \end{array}$

II. $\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b - c \\ \hline aa + ab + ac \\ +ab \quad +bb +bc \\ -ac \quad -bc -cc \\ \hline aa + 2ab \quad +bb \quad -cc. \end{array}$

III. $\begin{array}{r} a - b - c - dg \\ a + b - c \\ \hline aa - ab - ac - adg \\ +ab - bb - bc - bdg \\ -ac + bc + cc + cdg \\ \hline aa \quad -2ac - adg - bdg + cdg \\ -bb \quad +cc. \end{array}$

IV. $\begin{array}{r} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ +4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6. \end{array}$

V.

V. $4aa - 6a + 9$
$2a + 3$

$8aaa - 12aa + 18a$
$+ 12aa - 18a + 27$

$8aaa + 27.$

VI. $5 - 4 + 9$
$7 + 6 - 8$

$35 - 28 + 63$
$30 - 24 + 54$
$-40 + 32 - 72$

$+25 - 20 + 45 = 50.$

Oder kürzer:

$5 - 4 + 9 = 10$
$7 + 6 - 8 = 5$

$10 \times 5 = 50.$

IV. Division.

§. 145.

L. $(+a) \times (+b) = +ab;$
und $(-a) \times (-b) = +ab.$ (§. 137).

Das heißt: Zwei positive Factoren geben ein positives Product, und zwei negative =?

S. Geben auch ein positives Product.

L. Wie aber, wenn ich ein positives Product durch einen positiven Factor dividire?
Z. B. (+ ab) : (+ a)
was für einen Quotienten gibt das? Einen positiven, oder einen negativen?

S. Einen positiven.

$$(+ab) : (+a) = +b.$$

L. Woher das? Könte er nicht, — b, negativ seyn?

S. Nein. Der Quotient und Divisor in einander multiplicirt, müssen den Dividendus geben (§. 38). Wäre der Quotient nun — b, und ich multiplicirte ihn durch den Divisor + a, so erhielte ich

$$(-b) \times (+a) = -ab \text{ (§. 138.)}:$$

der Dividendus aber war + ab.

L. Das ist richtig. — Was aber gibt + ab dividirt durch — a?

S. $(+ab) : (-a) = -b$

denn $(-a) \times (-b) = +ab =$ Dividendus.

L. Nun sind noch zwei Fälle übrig:

$$(-ab) : (+a)$$

eine negative Grösse, durch einen positiven Divisor;

und $(-ab) : (-a)$

eine negative Grösse, durch einen negativen Divisor. Was für Bezeichnung werden hier die Quotienten erhalten?

S. $-ab : +a = -b$;
denn $+a \times -b = -ab$:
und $-ab : -a = +b$;
denn $-a \times +b = -ab$.

L. Ganz richtig! Noch ist zu bemerken, daß man hier, wie in der gemeinen Arithmetik, die Quotienten wie Brüche bezeichnen darf.

$$a : b = \frac{a}{b} \text{ (§. 38).}$$

Und nun wollen wir einmal alle vier Fälle gegen einander stellen, und uns dabei der lezten BezeichnungsArt bedienen:

$$\frac{+ab}{+a} = +b$$

$$\frac{+ab}{-a} = -b$$

$$\frac{-ab}{+a} = -b$$

$$\frac{-ab}{-a} = +b$$

Aufmerksame Betrachtung lehrt, daß hier, wie bei der Multiplication (§. 139), alle vier Fälle sich auf zweie bringen lassen. Und welches sind diese zweie?

S. Dividendus und Divisor haben entweder einerlei Bezeichnung, oder verschiedene. In ersterm Falle ist der Quotient bejahend; in lezterm verneinend.

L. Alles genau wie bei der Multiplication, bloß mit dem Unterschiede, daß hier anstat Factoren,

Divi-

Dividendus und Divisor, und anstat Product, Quotient steht. — Wie lautet nun die allgemeine DivisionsRegel, die Zeichen betreffend?

S. Einerlei Zeichen geben bejahende, verschiedene Zeichen geben verneinende Quotienten.

L. Die übrigen DivisionsRegeln sind schon längst bekant, und wir können nun zur Ausübung schreiten.

§. 146.

Kleine DivisionsExempel, zur Uebung.

A. Divisor und Dividendus einfach.

I. $+ a : - b = - \frac{a}{b}$

II. $- ab : - bc = + \frac{ab}{bc} = + \frac{a}{c}$ (§. 72)

III. $+ 12 : + 3 = + 4$

IV. $- 120 : - 3 = + 40$

V. $+ 60 : - 5 = - 12$

VI. $- 120 : + 4 = - 30$

VII. $+ 6a : + 2 = \frac{6a}{2} = \frac{3 \times 2 \times a}{2} = 3a$

VIII. $- 8b : + 2 = \frac{-8b}{+2} = - 4b$

IX. $6abc : - 2 = - 3abc$

X. $- 18ac : + 3c = - 6a$

XI.

XI. $-450\,abc : -10\,ab = +45\,c$

XII. $a : a = 1\,a : 1\,a$ (§. 125) $= \frac{1\,a}{1\,a} = \frac{1}{1} = 1$ (§. 74.)

XIII. $a : 4\,a = 1\,a = \frac{1\,a}{4\,a} = \frac{1}{4}$

XIV. $a : 2 = \frac{a}{2} = \frac{1\,a}{2} = \frac{1}{2} \times a$ (§. 77) $= \frac{1}{2}\,a$ §. 142).

XV. $ab : 3 = \frac{ab}{3} = \frac{1\,ab}{3} = \frac{1}{3}\,ab$

XVI. $2\,abc : 4\,bc = \frac{2\,abc}{4\,bc} = \frac{2}{4}\,a = \frac{1}{2}\,a$.

B. Divisor einfach, Dividendus zusammengesetzt.

I. $(6a - 8\,b) : 2 = \frac{6a}{2} - \frac{8b}{2} = 3\,a - 4\,b$

II. $(aa - 2\,ab) : a = a - 2\,b$

III. $(a + b) : a = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$

IV. $(-2a + b) : 2 = -\frac{2a}{2} + \frac{b}{2} = -a + \frac{1}{2}b$

V. $(abc + aab - aac) : bc = \frac{abc}{bc} + \frac{aab}{bc} - \frac{aac}{bc} = a + \frac{aa}{c} - \frac{aa}{b}$

VI. $(100 - 15) : 5 = 85 : 5 = 17$.

Oder auch: $(100 - 15) : 5 = \frac{100}{5} - \frac{15}{5} = 20 - 3 = 17$.

§. 147.

L. Wir müssen nun auch die Division mit mehrteiligem Divisor versuchen:

$$(ac - bc) : (a - b).$$

Wenn man mit Ziffern dividirt, und Divisor und Dividendus so groß sind, daß man nicht mit einem Blikke übersehn kann, wie oft der ganze Divisor im Dividendus stekkt, wie hilft man sich da?

S. Man dividirt bloß mit der ersten Ziffer des Divisors, in der ersten des Dividendus (§. 41).

L. So auch hier. Hier gelten die ersten Glieder ac uud a für die ersten Ziffern.

S. $ac : a = c$.

L. c also ist der erste Teil des Quotienten, vielleicht gar der ganze Quotient. Wan die erste Ziffer des Quotienten gefunden ist, was folgt dan weiter?

S. Man multiplicirt damit den Divisor, und zieht das Product vom Dividendus ab (§. 41).

L. Eben so auch hier.

S. $(ac - bc) : (a - b) = c$

$$\underline{ac - bc = (a - b) \times c}$$

$$0$$

L. c ist also der ganze Quotient! Daß der Quotient notwendig c enthalten muste, davon konte man sich schon vor der Division überzeugen. Divisor und

Quo=

Quotient durch einander multiplicirt, was geben die zum Producte?

S. Den Dividendus (§. 42).

L. Nun aber enthält der Dividendus drei Factoren, a, b und c; der Divisor aber nur zwei, a und b. Daraus folgt = ?

S. Daß der Quotient den dritten, c, enthalten müsse. Wo wolte a c herkommen, wenn a des Divisors nicht durch c multiplicirt würde?

L. Recht! — Nun noch einige kurze

UebungsExempel.

I. $(aa + ab) : (a + b) = a$

II. $(3aa - 2ab) : (3a - 2b) = a$

III. $(6aa - 9ab) : (2a - 3b) = 3a.$

§. 148.

L. Aber nicht immer erhält man gleich beim ersten Versuche den ganzen Quotienten, sondern gemeiniglich nur einen Teil, oder das erste Glied desselben. Hätte ich, z. B.

$$(aa + 2ab + bb) : (a + b)$$

so gibt das für den ersten Teil des Quotienten = ?

S. aa : a = a

L. Hiermit den Divisor a + b multiplicirt, gibt — ?

S. (a + b) × a = aa + ab

dieses abgezogen vom Dividendus, bleibt ab + bb

a + b	
aa + 2ab + bb	a + b
aa + ab	
ab + bb	
ab + bb	
0	

L. Recht! Aber wie nun weiter?

S. Ich muß in ab + bb mit a + b dividiren.

ab : a = b

kömt + b in den Quotienten. Hiermit a + b multiplicirt, gibt

(a + b) × b = ab + bb

Dieses ab + bb abgezogen von dem noch übrigen Teil des Dividendus, läßt nichts.

L. Recht! Das Verfahren ist von dem mit Ziffern (§. 41) fast nicht unterschieden, als nur in Ansehung der Zeichen, welche dort nicht vorkommen.

§. 149.

Da die Ordnung der Glieder willkührlich ist, so kan man ein Exempel auf mehrerlei Art ordnen. Das vorige, z. B. könte auch so stehn:

(bb + 2ab + aa) : (b + a)

und

und in dieser Gestalt wollen wir es einmal dividiren.

```
                b + a
S.  bb + 2ab + aa | b + a
    bb + ab
    ---------
      ab + aa
      ab + aa
      -------
            0
```

L. Oder man kan es auch so stellen:

(2ab + bb + aa) : (a + b);

dan aber wird die Rechnung weitläuftiger.

```
                a + b
S.  2ab + bb + aa | 2b + a — b = b + a
    2ab + 2bb
    ---------
        — bb + aa
             + aa + ab
        ---------------
          — b    — ab
          — b    — ab
          -------------
            0      0
```

L. Aus diesen und ähnlichen Versuchen kan man die DivisionsRegel ziehn: Die Bequemlichkeit erfodert, die Glieder des Divisors und Dividendus in einerlei Ordnung der Buchstaben auf einander folgen zu lassen; wozu die alphabetische die schiklichste ist. Zur Uebung wollen wir folgendes Exempel, nach der izt gefundenen Regel, ordnen:

(— 2ad + aa + dd — bb : (— b + a — d)

S.

E. Kömt so zu stehn:

$(aa - 2ad - bb + dd) : (a - b - d)$.

§. 150.

Uebungs-Exempel mit mehrteiligem Divisor und Dividendus.

I. $(aa - bb) : (a - b)$.

II. $(aa - bb - 2ad + dd) : (a - b - d)$.

III. $(24aa + 22ab - 56ac - 30bb + 42bc) : (8a - 6b)$.

IV. $(8aaa + 27) : (4aa - 6a + 9)$.

Ausrechnung.

I. $(aa - bb) : (a - b = a + b$

$$\begin{array}{r} aa - ab \\ \hline + ab - bb \\ + ab - bb \\ \hline 0 \end{array}$$

II. $(aa - bb - 2ad + dd) : (a - b - d) = a + b - d$

$$\begin{array}{r} aa - ab - ad \\ \hline + ab - bb - ad \\ + ab - bb - bd \\ \hline - ad + bd \\ - ad + bd + dd \\ \hline 0 \end{array}$$

III.

8a — 6b (Divisor)

III. 24aa + 22ab − 56ac − 30bb + 42bc | 3a + 5b − 7c

24aa — 18ab

+ 40ab

+ 40ab — 30bb

— 56ac + 42bc

— 56ac + 42bc

0

IV. (8aaa + 27) : (4aa — 6a + 9) = 2a + 3

8aaa — 12aa + 18a

+ 12aa — 18a + 27

+ 12aa — 18a + 27

0

§. 151.

L. Daß der Dividendus Factoren enthalten dürfe, die der Divisor nicht hat, und die Division dennoch ohne Rest geschehen könne, zeigt das dritte Exempel des vorigen §., wo der Dividendus c enthält, das im Divisor nicht befindlich ist. Ob aber umgekehrt auch Division ohne Rest Stat finde, wenn der Divisor Grössen enthält, die im Dividendus nicht sind? Ob z. B.

(bc + cc) : (a + b)

ohne

ohne Rest könne dividirt werden? das ist nun die Frage.

S. Das wird nicht angehn. Das Product aus dem Divisor und Quotienten muß den Dividendus geben (§. 42). Das kan aber nicht geschehn, wenn einer von beiden, entweder Divisor oder Quotient, einen Factor (a) enthalten, den der Dividendus nicht hat.

L. Könten sich nicht zwei Producte heben? Z. B.

$$+ ac - ac.$$

S. Dan müste auch im Quotienten $+ c$ und $- c$ seyn, und die würden sich auch heben.

L. Wir wollen doch einen Versuch machen. Da im Dividendus b voran steht, so mag es auch im Divisor voran stehn (§. 149).

S. $(bc + cc) : (b + a) = c$

$$\begin{array}{r} bc + ac \\ \hline (-ac + cc) : (a + b) \\ -ac - bb \\ \hline +bc + cc. \end{array}$$

Da sind wir wieder wo wir ausgingen, und der Quotient ist $+ c - c = o$.

L. Daß die Division ohne Rest nicht geschehen könne, ist nun wol ausgemacht. Vielleicht aber gibt es Exempel, die, wenn sie sich auch nicht ganz aufdividiren lassen, doch einen Quotienten geben, der sich nicht hebt, und einen kleinern Rest. Wir

wollen

wollen es einmal mit (bc + cc) : (b + c — a) versuchen.

S. (bc + cc) : (b + c — a) = c

bc + cc — ac

+ ac.

L. Da haben wir ja einen weit geringern Rest als der Dividendus war! und dabei müssen wir es bewenden lassen; denn dividiren wir weiter, so erscheint — c, im Quotienten, und der Rest wird dem Dividendus gleich. — Das war eine Vorbereitung auf Divisions Exempel die Reste geben, mit denen wir nun auch umzugehen wissen. Es wird, z. B.

(aa — bb + cc) : (a + b — c

zu dividiren gegeben!

a + b — c	
S. aa — bb + cc	a — b + c ...
aa + ab — ac	
— ab — bb + ac + cc	
— ab — bb + bc	
+ ac — bc + cc	
+ ac + bc — cc	
(— 2bc + 2cc) : (b + a — c) = — 2c	
— 2bc + 2cc — 2ac	
+ 2ac.	

Hier muß ich aufhören, wenn ich nicht den Rest wieder vergrössern will.

L. Wir haben also einen zweifachen Quotienten:

$$a - b + c + \frac{-2bc + 2cc}{a + b - c}$$

und

$$a - b + c - 2c + \frac{2ac}{a+b-c} = a - b - c + \frac{2ac}{a+b-c}$$

Brüche.

§. 152.

L. Die Regeln für die Berechnung der Brüche sind alle schon da gewesen.† Es folgen also bloß einige Exempel zur Uebung.

Additions-Exempel.

I. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (§. 89, 125).

II. $\frac{3x}{x+3} + \frac{5x}{xy+3y} = \frac{3xy}{xy+3y} + \frac{5x}{xy+3y} = \frac{3xy+5x}{xy+3y}$

III. $\frac{3}{a+5} + \frac{5}{2a+10} = \frac{3 \times 2}{(a+5) \times 2} + \frac{5}{2a+10} = \frac{6+5}{2a+10} = \frac{11}{2a+10}$

IV. $\frac{aa+bc}{ab+bb} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{aa+bc}{ab+bb} + \frac{(a-b)b}{(a+b)b} = \frac{aa+bc+ab-bb}{ab+bb.}$

† von Seite 121 bis 150.

Subtractions Exempel.

I. $\frac{9}{16x} - \frac{3}{8x} = \frac{9}{16x} - \frac{3 \times 2}{8x \times 2} = \frac{9-6}{16x} = \frac{3}{16x}$

II. $\frac{ab+bc}{ab} - \frac{a}{c} = \frac{(ab+bc)c}{abc} - \frac{aab}{abc} = \frac{abc+bcc-aab}{abc}$

$= \frac{abc}{abc} + \frac{bcc}{abc} - \frac{aab}{abc} = \frac{a}{a} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c}$ (§146) $= 1 + \frac{c}{a} - \frac{a}{c}$

Eben dieses kürzer:

$\frac{ab+bc}{ab} - \frac{a}{c} = \frac{ab}{ab} + \frac{bc}{ab} - \frac{a}{c} = 1 + \frac{c}{a} - \frac{a}{c}$

III. $(4 + \frac{3}{4}) - 5 = \frac{19}{4} - \frac{20}{4}$ (§. 89 f.) $= -\frac{1}{4}$

IV. $(a + \frac{c}{d}) - b = \frac{ad}{d} + \frac{c}{d} - b = \frac{ad+c-bd}{d}$

V. $(a + \frac{c}{d}) - (b + \frac{n}{m}) = \frac{ad+c}{d} - \frac{bm+n}{m} =$

$\frac{(ad+c)m}{dm} - \frac{(bm+n)d}{dm} = \frac{adm+cm-bdm+dn}{dm}$

Multiplications Exempel.

I. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ (§. 83).

II. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (§. 95).

III. $\frac{a}{b} \times (d + c) = \frac{a \times (d+c)}{b} = \frac{ad+ac}{b}$

IV. $(d + \frac{1}{a}) \times c = \frac{(ad+1)c}{a} = \frac{acd+c}{a} = \frac{acd}{a} + \frac{c}{a} = cd + \frac{c}{a}$

V. $\frac{x+3}{x} \times \frac{x}{x} = \frac{6x+18}{xx} = \frac{6x}{xx} + \frac{18}{xx} = \frac{6}{x} + \frac{18}{xx}$,

VI. $\frac{a-b}{b} \times \frac{a+b}{b} = \frac{aa-bb}{bb} = \frac{aa}{bb} - \frac{bb}{bb} = \frac{aa}{bb} - 1.$

Divisions Exempel.

I. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (§. 98.) $= \frac{ad}{bc}$ (§. 95).

II. $\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d} = \frac{ac : c}{bd : d}$ (§. 98.) $= \frac{a}{b}$.

III. $\frac{y+y}{5} : \frac{20y}{3} = \frac{(y+3)3}{5 \times 20y} = \frac{3y+9}{100y}$

IV. $\frac{1}{a} : a = \frac{1}{aa}$ (§. 83).

V. $\frac{r+x}{a-b} : \frac{n-m}{c} = \frac{(r+x)c}{(a-b)(n-m)} = \frac{cr+cx}{an-am-bn+bm}$.

Arithmetik.

Viertes Buch.

Von Potenzen und Wurzeln.

Erster Abschnitt. Von Potenzen.

I. Allgemeine Begriffe von Potenzen, §. 153.
II. Rechnung mit Potenzen, §. 159.
III. Von unendlichen Reihen, §. 169.

Zweiter Abschnitt. Von WurzelGrössen.

I. Von WurzelGrössen überhaupt, §. 176.
II. Die vier RechnungsArten mit WurzelGrössen, §. 187.

Dritter Abschnitt. Ausziehung der Wurzeln aus zusammen gesetzten WurzelGrössen.

Erster Abschnitt.

Von Potenzen.

I. Allgemeine Begriffe von Potenzen.

§. 153.

§. Ein Product aus lauter gleichen Factoren, wie aa, aaa, aaaa, bb, bbb, cc u. s. w., heisst eine Potenz oder Dignität des mit sich selbst multiplicirten Factors a, b, c. Den Grad der Potenz bestimt die Anzahl der gleichen Factoren. So heisst, z. B. aa die zweite, aaa die dritte Potenz von a; bb die zweite Potenz von b u. s. w. Dabei ist zu merken, daß die Potenzen des zweiten und dritten Grades, ausser der izt angezeigten algemeinen Benennung, noch eine besondre haben. Man nennt nämlich erste, oder die Potenz des zweiten Grades, auch Quadrat, und lezte, oder die des dritten Grades, Cubus, oder Würfel.

S.

S. Welches ist denn die erste Potenz? oder die des ersten Grades?

L. Eine erste Potenz gibt es nicht.

S. Das ist ja sonderbar, daß es eine zweite Potenz gibt, und keine erste. Könte man nicht einen einzelnen Factor, a, b, die erste nennen?

L. Ganz ungewöhnlich ist diese Benennung auch nicht, aber sie ist unrichtig. Da, vermöge der Erklärung, eine Potenz ein Product aus gleichen Factoren ist; so kan ein einzelner Factor a, b, keine Potenz heissen: sondern er heisst, in Beziehung auf Potenz, Wurzel, oder Stammgrösse.

S. Kan denn a nicht die erste Potenz seyn, so müste aa die erste, aaa die zweite, aaaa die dritte, u. s. w. heissen.

L. Die alten Geometer machten es auch so; die neuen aber sind davon abgegangen, vermutlich weil sie die Nichtübereinstimmung der Zahl der Potenz, mit der Zahl der Factoren, noch unschiklicher fanden, als den Mangel einer ersten Potenz.

§. 154.

L. Die zweite Potenz von a also ist aa,
Die dritte " " aaa,
Die vierte " " aaaa,
Die fünfte " " aaaaa,

und

und so fort. Wie viel a würde man nun brauchen die zehnte Potenz anzudeuten?

S. Zehne: aaaaaaaaaa.

L. Das wäre sehr lästig; und noch lästiger würde es seyn, wenn man, auf ähnliche Art, die zwanzigste, dreizigste, oder gar die hundertste Potenz bezeichnen wolte. Man hat daher eine Abkürzung erdacht, welche darin besteht, daß man nur einen Factor, die StammGrösse der Potenz (§. 153) hinschreibt, und durch eine kleine Ziffer oben zur Rechten, andeutet, wie oft er stehn solte. So schreibt man, z. B. für aa auch = a^2

für aaa = a^3

für aaaa = a^4

für aaaaa = a^5

u. s. w.

Diese Zahl, welche den Grad der Potenz andeutet, nennt man den Exponenten derselben. Er kan, wenn der Grad unbestimmt ist, auch ein Buchstabe seyn. So heisst, z. B. x^n die 12te Potenz, oder die Potenz des 12ten Grades der Grösse x.

§. 155.

L. Um das bisher Gesagte besser einzuprägen, wollen wir eine kurze Wiederholung anstellen. — Wie bezeichnet man die vierte Potenz von x?

S.

S. $x^4 = xxxx$.

L. Und die vierte Potenz von 3?

S. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

L. Und die dritte Potenz von 2?

S. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

L. Welchen Namen hat die dritte Potenz sonst noch?

S. Cubus, oder Würfel.

L. Und die zweite Potenz?

S. Heisst Quadrat.

L. Die wie vielste Potenz der 10 ist 1000000, oder eine Million?

S. $1000000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$. Eine Million ist die sechste Potenz von 10.

L. Wie nennt man die Zahl, welche den Grad der Potenz bezeichnet?

S. Den Exponenten.

L. Die dritte Potenz von $a = aaa = a^3$, hat zum Exponenten 3;
die zweite $= aa = a^2$, hat zum Exponenten 2;
welches wird nun der Exponent der Wurzel, oder StammGrösse seyn?

S. Muß sie einen haben, so kan er nicht anders als 1 seyn.

L.

L. Gewöhnlich schreibt man die StammGrösse ohne Exponenten; erfodert die Deutlichkeit aber, sie damit zu bezeichnen, so ist er 1. Es ist dem zufolge $a = a^1$.

§. 156.

L. Lassen sich auch wol Brüche zu Potenzen erheben?

S. Ich solte meynen. Eine Potenz ist eine durch sich selbst multiplicirte Grösse (§. 152). Ich kan aber eine gebrochene Zahl so gut durch sich selbst multipliciren, als eine ganze.

L. Welches sind denn die Potenzen von $\frac{a}{b}$?

S. $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a2}{b2}$

$(\frac{a}{b})^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a3}{b3}$

$(\frac{a}{b})^4 = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a4}{b4}$

L. Schon genug! Um also einen gegebenen Bruch zu einer verlangten Potenz zu erheben, wie verfährt man?

S. Man multiplicirt Zähler und Nenner, jeden durch sich selbst, so oft als der Grad der Potenz erfodert.

Exem-

Exempel.

$$(\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2^2}{3^2} = \tfrac{2 \times 2}{3 \times 3} = \tfrac{4}{9}$$

$$(\tfrac{4}{5})^3 = \tfrac{4^3}{5^3} = \tfrac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \tfrac{64}{125}$$

$$(2 + \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{5^2}{2^2} = \tfrac{5 \times 5}{2 \times 2} = \tfrac{25}{4} = 6 + \tfrac{1}{4}$$

$$(1 + \tfrac{1}{3})^3 = (\tfrac{4}{3})^3 = \tfrac{4 \times 4 \times 4}{3 \times 3 \times 3} = \tfrac{64}{27} = 2 + \tfrac{10}{27}$$

$$(\tfrac{a}{c})^n = \tfrac{an}{ca}$$

§. 157.

L. Auch Producte lassen sich zu Potenzen erheben. Z. B. von ab die zweite Potenz, oder $(ab)^2$?

S. $(ab)^2 = ab \times ab = abab$ (§. 142) $= aabb = a^2b^2$ (§. 153).

L. Also $(ab)^2 = a^2b^2$. In dieser Formel steckt folgender LehrSatz: Das Quadrat eines Products ist ein Product aus den Quadraten der Factoren. — Was aber wird der Würfel eines Products, $(ab)^3$, seyn?

S. $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = ababab = aaabbb = a^3b^3$.

Der Würfel ist ein Product aus den Würfeln der Factoren.

L. Und die vierte Potenz eines Products ab?

S. $(ab)^4 = aaaabbbb = a^4b^4$.

Die vierte Potenz eines Products, ist ein Product aus den vierten Potenzen der Factoren.

L. Es ist nun wol klar, daß sich das, was hier von der zweiten, dritten und vierten Potenz erwiesen ist, auf alle mögliche Dignitäten ausdehnen lasse. Die allgemeine Formel für alle Potenzen ist $(ab)^n = a^nb^n$: und die Regel, oder der alles umfassende LehrSatz würde lauten = = ?

S. Die Potenz eines Products ist ein Product aus den Potenzen der Factoren.

§. 158.

L. Wir haben Potenzen und Wurzeln bisher ohne Hinsicht auf Zeichen betrachtet. So viel ist wol klar, daß eine positive Wurzel nichts anders als eine positive Potenz geben kan: daß

$$+a \times +a = +aa = +a^2 \text{ (§. 152)}$$
$$+a \times +a \times +a = +aaa = +a^3$$

u. s. w. (§. 138). Aber eine negative Wurzel, $-a$, was für Potenzen wird die liefern?

S.

E. $-a \times -a = +aa$ (§. 138) $= +a^2$

$-a \times -a \times -a = +aa \times -a =$

$-aaa = -a^3$

$-a \times -a \times -a \times -a = +aa \times +$

$aa = +aaaa = +a^4$

L. Und so wechselt es immer ab. Daraus kan man die Regel ziehn = = ?

S. Eine negative Wurzel gibt wechselsweis eine positive, und eine negative Potenz;

$+a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ u. s. w.

L. Und zwar so, daß die Potenzen mit geraden Exponenten bejahend, und die mit ungeraden verneinend sind.

II. Von den RechnungsArten mit Potenzen.

§. 159.

L. Addition und Subtraction der Potenzen haben keine Schwirigkeit. Sind sie gleichartig; das heisst, haben sie einerlei StammGrössen, und einerlei Exponenten; so werden bloß die Coefficienten (§. 125) addirt, und subtrahirt.

Z. B. $3a^2 + 4a^2 = 7a^2$

$5b^3 - 2b^3 = 3b^3$

Sind

Sind aber StammGrössen, oder Exponenten verschieden, so sind es ungleichartige Grössen, und es kan weder Addition noch Subtraction anders geschehn, als durch Hülfe der Zeichen. Z. B. $2a^3$ und $2a^2$ addirt, gibt $2a^3 + 2a^2$; und eben die subtrahirt, geben $2a^3 - 2a^2$.

AdditionsExempel.

$$\begin{array}{r} a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 3b^3 \\ a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3 - c^4 \\ \hline 2a^3 - 3a^2b - 2b^3 - c^4 \end{array}$$

SubtractionsExempel.

$$\begin{array}{r} a^2 + ab - 2b^2 - 5e^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 + 2bc^2 - d^3 - e^2 \\ \hline +3ab - 3b^2 - 2bc^2 + d^3 - 4e^2 \end{array}$$

§. 160.

L. Zwei Potenzen von gleichen StammGrössen, a^2 und a^3 multiplicirt, was geben die?

S. $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$ (§. 153)

L. Der Exponent des Products, 5, wie ist der entstanden?

S. Er ist die Summe der Exponenten der Factoren 2 + 3.

L. Da haben wir, die MultiplicationsRegel für Potenzen von gleichen StammGrössen. Welches ist sie?

S. Man addirt bloß die Exponenten der Factoren.

L. Wenn aber die Stammgrössen ungleich sind? Z. B. a^2 und b^3?

S. Dan werden sie wol nicht anders, als durch Hülfe des Zeichens zu multipliciren seyn: $a^2 \times b^3$.

L Man kan sie durch das MultiplicationsZeichen verbinden, oder auch ohne dasselbe an einander fügen:

$$a^2 \times b^3 = a^2b^3 \text{ (§. 141).}$$

A. Kleinere MultiplicationsExempel.

I. $a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$

II. $a^4 \times a = a^{4+1} = a^5$

III. $a^2 \times b^3 = a^2b^3$

IV. $y^m \times y^n = y^{m+n}$

V. $y^m \times y^2 = y^{m+2}$

VI. $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$

VII. $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$

VIII. $4a^2 \times a^3 = 4a^{2+3} = 4a^5$

IX. $4a^2 \times 5a^3 = 4 \times 5 \times a^{2+3} = 20a^5$

X. $3a^2b \times 2a^3c = 6a^5bc$

XI. $(2ab - a^2b) \times a^2 = 2a^3b - a^4b$.

B. Grössere MultiplicationsExempel.

I. $(4a^2 - 6a + 9) \times (2a + 3)$.

II. $(a^2 + 2ab + 2b^2) \times (a^2 - 2ab + 2b^2)$.

III. $(a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2) \times (a + b + c)$

IV. $(a^2 + ab + b^2) \times (a^2 - ab + b^2) \times (a^2 - b^2)$

Berechnung der Exempel B.

I. Steht schon §. 144. V.

II.
$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + 2b^2 \\ a^2 - 2ab + 2b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \\ - 2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 \\ + 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 \qquad\qquad + 4b^4 \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\ a + b + c \\ \hline a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2 \\ + a^2b \quad - ab^2 - abc \quad + b^3 - b^2c + bc^2 \\ + a^2c \quad - abc - ac^2 \quad + b^2c - bc^2 + c^3 \\ \hline a^3 \qquad - 3abc \quad + b^3 \qquad + c^3 \end{array}$$

IV. $a^2 + ab + b^2$
$a^2 - ab + b^2$

$a^4 + a^3b + a^2b^2$
$- a^3b - a^2b^2 - ab^3$
$+ a^2b^2 + ab^3 + b^4$

$a^4 + a^2b^2 + b^4$
$a^2 - b^2$

$a^6 + a^4b^2 + a^2b^4$
$- a^4b^3 - a^2b^4 - b^6$

$a^6 - b^6$

§. 161.

L. Potenzen von gleicher StammGröſſe werden multiplicirt durch Addition ihrer Exponenten:

$$\left.\begin{array}{l} a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5 \\ a^3 \times a^2 \times a = a^{3+2+1} = a^6 \end{array}\right\} \text{(§. 159)}$$

Sind aber die Exponenten der zu multiplicirenden Potenzen alle gleich;

z. B. $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2}$

so läßt sich eine Abkürzung des Verfahrens anbringen. Und was für eine wird das seyn?

S. Man multiplicirt, anstat zu addiren.

$$a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} \text{ (§. 15)} = a^6$$

L. Recht! Man hat also ein sehr bequemes Mittel, eine gegebene Potenz zu einer verlangten höhern zu erheben. Z. B. a^3 soll zur vierten Dignität erhoben werden.

S. $(a^3)^4 = a^{3 \times 4} = a^{12}$

L. Die allgemeine Formel, eine gegebene Potenz a^m zu einem verlangten höhern Grade ^{n} zu erheben, ist $(a^m)^n = a^{mn}$; und die Regel davon ist . . ?

S. Man multiplicirt die Exponenten der gegebenen Potenz durch die Zahl, welche den Grad der Potenz andeutet, zu der sie soll erhoben werden.

L. Auch StammGrössen können als Potenzen betrachtet werden, wenn man ihnen 1 zum Exponenten gibt (§. 154). Es findet daher die Regel auch auf sie Anwendung. Wie wird z. B. a zur dritten Dignität erhoben?

S. $(a)^3 = a^{1 \times 3} = a^3$

L. So auch Brüche $\left(\frac{a}{c^2}\right)^3 = \frac{a^{1 \times 3}}{c^{2 \times 3}} = \frac{a^3}{c^6}$

$$\left(\frac{a^2b}{3^2}\right)^3 = \frac{a^{2 \times 3} b^{1 \times 3}}{3^{2 \times 3}} = \frac{a^6 b^3}{3^6} = \frac{a^6 b^3}{729}$$

§. 162.

L. $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ (§. 160)

Was gibt nun $a^5 : a^2$?

S. $a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3$

L. Und der Exponent 3 des Quotienten a^3, wie ist der erwachsen?

S. Durch Subtraction des Exponenten des Divisors, von dem Exponenten des Dividendus.

$$a^{5-2} = a^3$$

L. Da haben wir also auch die Divisions-Regel für Potenzen von gleichen StammGrössen. Der Exponent des Quotienten ist der Ueberschuß = ?

S. Des Exponenten des Dividendus, über den des Divisors.

L. Sind die StammGrössen ungleich; so kan die Division nicht anders geschehn als durch Zeichen.

$$\text{Z. B. } a^3 : b^2 = \frac{a^3}{b^2}$$

A. Kleinere DivisionsExempel.

I. $y^m : y^n = y^{m-n}$

II. $y^{m+n} : y^n = y^m$

III. $5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3 = 125$

IV. $a^2 : a = a^{2-1} = a^1 = a$

V. $a : a = a^{1-1} = a^0$

VI. $a^0 : a = a^{0-1} = a^{-1}$

VII. $a : a^2 = a^{1-2} = a^{-1} = \frac{a}{a^2}$

VIII.

VIII. $a^4 : a^6 = a^{4-6} = a^{-2}$

IX. $(a^2 - 2ab) : a = \frac{a^2}{a} - \frac{2ab}{a} = a - 2b$

X. $(a^3 - 2ab + 3ab^2) : a = a^2 - 2b + 3b^2$

XI. $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = \frac{aa}{aa} - \frac{ab}{aa} + \frac{bb}{aa} = 1$

$$- \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$$

XII. $(8ffgg - 12fggh - 20gghh + ffhh) : -4ffhh$

$$= - \frac{8ffgg}{4ffhh} + \frac{12fggh}{4ffhh} + \frac{20gghh}{4ffhh} - \frac{1ffhh}{4ffhh}$$

$$= - \frac{2gg}{hh} + \frac{3gg}{fh} + \frac{5gg}{ff} - \frac{1}{4}$$

B. Grössere Divisions-Exempel.

I. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a^2 - 2ab + b^2)$

II. $(8a^3 + 27) : (2a + 3)$

III. $(8a^3 - b^3) : (4a^2 + 2ab + b^2)$

IV. $x^3 - 6x^2 + 14x - 24) : (x - 4)$

V. $(1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5)$

$$: (1 - 2x + x^2$$

Berech-

Berechnung der Exempel B.

I.
$$\begin{array}{r|l} a^2 - 2ab + b^2 & \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & a - b \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 & \\ \hline -a^2b + 2ab^2 - b^3 & \\ -a^2b + 2ab^2 - b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

II. $(8a^3 + 27) : (2a + 3) = 4a^2 - 6a + 9$

$$\begin{array}{r} 8a^3 + 12a^2 \\ \hline -12a^2 + 27 \\ -12a^2 - 18a \\ \hline +18a + 27 \\ +18a + 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

III. $(8a^3 - b^3) : (4a^2 + 2ab + b^2) = 2a - b$

$$\begin{array}{r} 8a^3 + 4a^2b + 2ab^2 \\ \hline -4a^2b - 2ab^2 - b^3 \\ -4a^2b - 2ab^2 - b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r|l} x - 4 & \\ \hline x^3 - 6x^2 + 14x - 24 & x^2 - 2x + 6 \\ x^3 - 4x^2 & \\ \hline -2x^2 + 14x & \\ -2x^2 + 8x & \\ \hline +6x - 24 & \\ +6x - 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

V.

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1-2x+x^2 \\
\cline{2-2}
1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5 & 1-3x+3x^2-x^3 \\
1-2x+x^2 & \\
\cline{1-1}
-3x+9x^2 & \\
-3x+6x^2-3x^3 & \\
\cline{1-1}
+3x^2-7x^3 & \\
+3x^2-6x^3+3x^4 & \\
\cline{1-1}
-x^3+2x^4 & \\
-x^3+2x^4-x^5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

§. 163.

L. Aus den Exempeln

$$\left.\begin{array}{l} a : a = a^0 \\ \text{und } a^0 : a^1 = a^{-1} \end{array}\right\} \text{(§. 161)}$$

sehen wir, daß der Exponent auch 0, ja sogar verneinend seyn könne. — Was bedeutet denn a^0?

S. $a^0 = a^{1-1} = a^1 : a^1 = a : a = \frac{a}{a} = 1$ (§. 73)

L. Also $a^0 = 1$. Wenn man aber eine Zahl an die Stelle des Buchstaben setzte; z. B. 4; was würde nun 4^0 bedeuten?

S. $4^0 = 4^{1-1} = 4^1 : 5^1 = 4 : 4 = \frac{4}{4} = 1$ (§. 73).

L. Also auch $4^\circ = 1$. Nun wollen wir einmal für die ganze Zahl eine gebrochene nehmen. Was wird $(\frac{2}{3})^\circ$ für eine Bedeutung haben?

S. $(\frac{2}{3})^\circ = (\frac{2}{3})^{1-1} = (\frac{2}{3})^1 : (\frac{2}{3})^1 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{6}{6}$ (§. 83) $= 1$.

L. Also jede Grösse, die o zum Exponenten hat, es sei eine bestimmte oder unbestimmte, eine ganze, oder gebrochene Zahl, bedeutet = ?

S. So viel als 1.

L. Das hat beim ersten Anblikk etwas Sonderbares; aber das Befremdende verschwindet, wenn man bedenkt, daß $a^\circ = a : a$, oder eine durch sich selbst dividirte Grösse, vorstellt, die nie etwas anders als 1 zum Quotienten geben kan. Denn

$$a : a = 4 : 4 = \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1 = a^\circ$$

§. 164.

Ob auch $o^\circ = 1$ sei, wie Euler behauptet (Vollständige Anleitung zur Algebra; §. 145 nach Eberts Ausgabe) lasse ich dahin gestellt seyn. Denn da $o^\circ = o : o$ so müste, nach Eulers Voraussetzung o in o ein Mal enthalten seyn. Allein mir deucht o stekke in o eben so gut tausend, oder millionen Mal, als ein Mal. Meiner Meinung nach hat o° keine bestimmte Bedeutung. (Man vergleiche Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, Cap. XI. §. 185, 186, 187). Seite 423.

§. 165.

§. 165.

L. Also $a^0 = 1$ (§. 162) : was aber wird a^{-1} seyn?

S. $a^{-1} = a^{0-1} = a^0 : a^1 = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$

Oder auch $a^{-1} = a^{1-2} = a^1 : a^2 = \frac{1a}{aa} = \frac{1}{a}$

L. Und a^{-2}?

S. $a^{-2} = a^{0-2} = a^0 : a^2 = \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$

L. Und so geht es weiter:

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ u. s. f.

Läßt man a eine beliebige Zahl gelten, z. B. 2; so ist

$a^0 = 2^0 = 1$ (§. 163)

$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$a^{-4} = \frac{1}{a4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ u. s. w.

Nimt man aber $a = 3$ an; so ist: ?

S. $a^0 = 3^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$a^{-3} = \frac{1}{a3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ u. s. w.

L. Gesetzt aber es wäre $a = \frac{2}{3}$: :?

S. So ist $a^0 = (\frac{2}{3})^0 = 1$ (§. 162)

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8} \text{ u. s. f.}$$

L. Es ist also

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

$$(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{1}{(\frac{2}{3})}$$

$$(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2}$$

$$(\frac{2}{3})^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} \text{ 2c. u. s. w.}$$

Kurz, jede Grösse, mit einem verneinenden Exponenten, ist ein Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner = .

S. Eine Potenz eben dieser Grösse ist, doch mit bejahenden Exponenten.

§. 166.

L. $(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}}$ (§. 164) $= \frac{3}{2}$

$(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} = (\frac{3}{2})^2$

$(\frac{2}{3})^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} = (\frac{3}{2})^3$ ꝛc.

Oder umgekehrt:

$(\frac{3}{2})^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$(\frac{3}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} = (\frac{2}{3})^2$

$(\frac{3}{2})^{-3} = \frac{1}{(\frac{3}{2})^3} = (\frac{2}{3})^3$

Ueberhaupt:

$$(\frac{m}{n})^{-r} = \frac{1}{(\frac{m}{n})^r} = (\frac{n}{m})^r$$

Wie lautet dieses mit Worten ausgedrukkt?

S. Ein Bruch mit verneinendem Exponenten ist eben dieser Bruch umgekehrt mit bejahendem Exponenten.

L. Recht! Ein eigentlicher Bruch wird durch den Exponenten in einen uneigentlichen, und ein uneigentlicher in einen eigentlichen verwandelt (§. 73).

§. 167.

L. Die Zahl 1, wenn anders 1 eine Zahl genant werden kan, hat das Besondere, daß sie, auch mit verneinendem Exponenten, nie ein eigentlicher Bruch wird. Es ist nämlich

$$1^0 = 1^{1-1} = 1 : 1 = 1$$

$$1^{-1} = 1^0 : 1^1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$1^{-2} = 1^0 : 1^2 = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Und so geht es ohne Ende fort, 1 bleibt immer 1, man mag ihm geben welchen Exponenten man will.

§. 168.

Uebungs-Exempel in Brüchen.

A. Additions-Exempel.

$$\frac{a^2+bc}{ab+b^2} + \frac{a-b}{a+b} + \frac{a}{b} = \frac{a^2+bc}{ab+b^2} + \frac{(a-b)b}{(a+b)b} + \frac{a(a+b)}{b(a+b)}$$

$$= \frac{a^2+bc+ab-b^2+a^2+ab}{ab+b^2} = \frac{2aa+2ab-bb+be}{ab+bb}$$

B. Subtractions Exempel.

$$\frac{14}{6y-10} - \frac{7y-8}{6} = \frac{14 \times 6}{(6y-10)6} - \frac{(7y-8)\times(6y-10)}{6y-10)6}$$

$$= \frac{84-(42yy-118y+80)}{36y-60} = \frac{84-42y^2+118y-80}{36y-60}$$

$$(\S.\ 135) = \frac{(4-42y^2+118y):2}{(36y-60):2} = \frac{2-21y^2+59y}{18y-30}$$

C. Multiplications Exempel.

I. $\frac{a^2+b^2}{a-b} \times \frac{a-b}{b+c} = \frac{(a^2+b^2)\times(a-b)}{(b+c)\times(a-b)}$ (§. 95).

$$= \frac{a^2+b^2}{b+c}$$

II. $\frac{a^2+2ab+b^2}{ab} \times \frac{b^2}{a+b} = \frac{(a+b)\times(a+b)\times b^2}{ab\times(a+b)} = \frac{(a+b)\,bb}{ab}$

$$= \frac{(a+b)\,b}{a} = \frac{ab+b^2}{a} = b+\frac{bb}{a}$$

III. $\left(a+\frac{bc}{a}\right)\times\left(b+\frac{ac}{d}\right) = ab+\frac{b^2c}{a}+\frac{a^2c}{d}$

$$+\frac{abc^2}{ad} = ab+\frac{b^2c}{a}+\frac{a^2c+bc^2}{d}$$

IV. $(2y-20)\times\frac{y^2-6y}{10} = \frac{2(y-10)\times(y^2-6y)}{2\times 5}$

$$= \frac{y^3-16y^2+60y}{5} = \frac{y^3-16y^2}{5}+12y$$

V. $\left(a-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}\right)a = \frac{1a}{a}-\frac{ab}{a^2}+\frac{ab^2}{a^3} = 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$

VI.

VI. $\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}\right) \times (a + b)$

Berechnung dieſes lezten Exempels.

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$$

$$+\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} - \frac{b^6}{a^6}$$

$$1 \qquad\qquad - \frac{b^6}{a^6}$$

D. Diviſions Exempel.

I. $\frac{a^2 + b^2}{c} : \frac{b^2 + c^2}{d} = \frac{(a^2 + b^2)d}{(b^2 + c^2)c} = \frac{a^2 d + b^2 d}{b^2 c + c^3}$

II. $\frac{a^3 - ab^2}{c - d} : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{c - d} = \frac{(a^3 - ab^2)\ (c - d}{(a^2 + 2ab + b^2)\ (c - d}$

$$= \frac{(a^3 - ab^2) : (a + b)}{(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)} = \frac{a^2 - ab}{a + b}$$

III. $(6x + 12) : \left(x^2 + \frac{8x + 4}{3}\right) - (6x + 12) : \frac{3x^2 + 8x + 4}{3}$

$$= \frac{(6x + 12)\,3}{3x^2 + 8x + 4} = \frac{(3 \times 6)\ (x + 2)}{(3x + 2)\ (x + 2)} = \frac{18}{3x + 2}$$

IV. $\frac{1}{a^2} : a^3 = \frac{1}{a^2 \times a^3} = \frac{1}{a^{2+3}} = \frac{1}{a^5}$

V. $-\frac{b^3 c}{a^3} : a = -\frac{b^3 c}{a^3 \times a} = -\frac{b^3 c}{a^4}$

III. Von unendlichen Reihen und unendlichen Grössen *).

§. 169.

L. Man kan auch Brüche, oder DivisionsReste, ob sie gleich ohne Rest nicht teilbar sind, dennoch fort dividiren. Wir wollen dieses einmal mit dem Bruche $\frac{1}{1-x}$ versuchen.

S. $1 : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$$\begin{array}{r|l}
1 - x & \\
\hline
+ x & \\
+ x - x^2 & \\
\hline
+ x^2 & \\
+ x^2 - x^3 & \\
\hline
+ x^3 & \\
+ x^3 - x^4 & \\
\hline
+ x^4 & \\
+ x^4 - x^5 & \\
\hline
+ x^5 &
\end{array}$$

Ich sehe schon, das geht so ohne Ende fort. Der Quotient enthält lauter Potenzen von x, deren Exponent, mit jedem neuen Gliede, um 1 wächst.

L.

*) Anfänger können diesen ganzen Abschnitt überschlagen.

L. Recht! Und da $x = x^1$ (§. 155), und $x^0 = 1$ (§. 162); so fangen die Potenzen von x schon mit dem ersten Gliede an. Der Quotient kan nämlich auch ausgedrukkt werden:

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \text{ ꝛc.}$$

Man nennt einen solchen Quotienten eine unendliche Reihe; und das Verfahren, einen Bruch in eine unendliche Reihe auflösen. Der Bruch $\frac{1}{1-x}$ in eine unendliche Reihe aufgelöst, gibt also...?

S. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ ꝛc.

$$= x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \text{ ꝛc.}$$

L. Den Quotienten kan man ohne Ende fortsetzen: will man ihn aber vollständig haben, was ist zu tun?

S. Man muß, wo die Reihe abbricht, den Rest hinzufügen.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \text{ u. s. w.}$$

§. 170.

Noch einige Exempel von unendlichen Reihen zur Uebung.

I. $1:(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ ꝛc.

II.

II. Eben dieser Bruch kan auch so aufgelöset werden:

$$1 : (x + 1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \text{ ꝛc.}$$

III. Der Dividendus kan auch eine unbestimmte Grösse seyn:

$$c : (a+b) = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} \text{ ꝛc.}$$

IV. Der Divisor kan auch mehr als zweiteilig seyn:

$$1 : (1 - a + a^2) = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^8 \text{ u. s. w.}$$

Exempel I.

$1 : (1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3$ ꝛc.

$1 + x$

$-x$

$-x - x^2$

$+ x^2$

$+ x^2 - x^3$

$- x^3$

$- x^3 + x^4$

$- x^4$ u. s. w.

Exempel II.

$$1 : (x+1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \text{ ꝛc.}$$

$$\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{x} \\ \hline -\frac{1}{x} \\ \quad -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ \hline \quad +\frac{1}{x^2} \\ \quad +\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \\ \hline \quad\quad -\frac{1}{x^3} \\ \quad\quad -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \\ \hline \quad\quad\quad +\frac{1}{x^4} \text{ u. ſ. w.} \end{array}$$

Exempel III.

$$c : (a+b) = \frac{a}{c} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} \text{ u. ſ. w.}$$

$$\begin{array}{l} c + \frac{bc}{a} \\ \hline -\frac{bc}{a} \\ \quad -\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2} \\ \hline \quad +\frac{b^2c}{a^2} \\ \quad +\frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3} \\ \hline \quad\quad -\frac{b^3c}{a^3} \text{ u. ſ. w.} \end{array}$$

Das IV. Exempel hat keine Schwirigkeit.

§. 171.

§. 171.

L. Nach diesen Mustern (§. 169, 170) lässt sich jeder Bruch in eine unendliche Reihe auflösen. Hätte man, z. B. den Bruch $\frac{1}{4}$ aufzulösen, so könte das Exempel

$1 : (1 + x)$ oder $1 : (x + 1)$

zum Muster dienen, 1 bliebe dan 1; x aber würde 3. Und so hätte man dan

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4} = \frac{1}{1+3}$$

Wie würde nun die Reihe aussehn?

S. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$ &c.

$\frac{1}{1+3} = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + 3^6$ &c.

$= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729$ &c.

L. Ganz recht! Einen Bruch aber, dessen Zähler grösser wäre als 1, z. B. $\frac{3}{4}$, in eine unendliche Reihe aufzulösen, was würde dem zum Muster dienen.

S. Das Exempel $c : (a + b)$. Es wäre dan

$\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4}$; $c = 3$; $a = 1$; $b = 3$;

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5}$$

$$\frac{3}{1+3} = 3 - 3 \times 3 + 3^2 \times 3 - 3^3 \times 3 + 3^4 \times 3 - 3^5 \times 3$$

$$= 3 - 9 + 27 - 81 + 243 - 729$$

L. Gesetzt aber man nähme $b = 1$, und $a = 3$ ..?

S. Dan sieht die Reihe so aus:

$$\frac{3}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{3}{3^4} + \frac{3}{3^5} \text{ 2c.}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} \text{ 2c.}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} \text{ 2c.}$$

§. 172.

L. Eine besondere Betrachtung verdient das Exempel $\frac{1}{1-x}$ (§. 169). Wir wollen einmal $x = \frac{1}{2}$ annehmen; so ist

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}};$$

und die Reihe = ?

S. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ 2c.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4 + (\tfrac{1}{2})^5 \text{ 2c.}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \text{ 2c.}$$

L. Eigentlich ist $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1:2}$ (§. 112) $= 2$.

Und diesem wahren und eigentlichen Quotienten nähert sich die Reihe immerfort, ohne ihn je zu erfüllen,

füllen, es sei denn daß man den Rest, als Ergänzung, hinzufügte. Alsdan erhält man

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{oder } 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

$$\text{oder } 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = 1\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 2$$

u. s. w.

Wir wollen aber nun einmal $x = 1$ annehmen, und sehn was das gibt.

S. $x = 1$, gibt $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$; und die Reihe ist

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ ꝛc.}$$

Es gibt eine unendliche Reihe von lauter + 1.

L. Man muß den Rest dazu nehmen; vermuthlich ist der verneinend, so daß er die unendlich wachsende Reihe wieder vermindert.

S. Der Rest ist $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$.

L. Ist es nicht sonderbar, daß der Rest ist wie der Anfang? und noch sonderbarer, daß er immer so bleibt, man mag die Division fortsetzen, so weit man wil.

$\frac{1}{1-1} = 1 + \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + \frac{1}{1-1} = 1 + 1$
$+ 1 + \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$ u. s. w.

Und das geht so fort bis ins Unendliche. Und hat man Billionen, Trillionen, Quadrillionen u. s. w. Mal 1 im Qotienten, so ist der Rest noch nicht um ein Haar vermindert. Er ist und bleibt $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, wie der Anfang war. — Woher mag das kommen? Solte etwan $\frac{1}{0}$ eine Zahl seyn, die nie erschöpft wird, man mag so viel Mal 1 dafür annehmen, als man wil? Die Sache verdient nähere Untersuchung.

S. $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 : 0$ (§. 101). Man soll also 1 durch 0 dividiren; das heisst, untersuchen, wie oft 0 in 1 enthalten ist. Das lässt sich aber nicht bestimmt angeben. 0 ist so viel als Nichts; und Nichts ist unzählige Mal in 1 enthalten.

K. So ist es! 0 stekkt unzählige Mal in 1. Der Quotient kan also kein Ende nehmen: Er muß unaufhörlich wachsen. Da nun der Bruch $\frac{1}{0}$ den Quotienten vorstellt, so kan es nicht anders seyn, $\frac{1}{0} = 1 : 0$ muß eine unendlich grosse Zahl bedeuten. — Wir wollen dieser Sache weiter nachforschen.

§. 172.

L. $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$ = Hälfte von $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$ = Hälfte von $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8 \times 2} = \frac{1}{16}$ = Hälfte von $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{1 \times 10} = \frac{1}{10}$ = zehnte Teil von 1

$\frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$ = zehnte Teil von $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{100 \times 100} = \frac{1}{10000}$ = hundertste Teil von $\frac{1}{100}$

u. s. w.

Was können wir hieraus für eine Lehre ziehn?

S. Daß ein Bruch, dessen Zähler ungeändert bleibt, immer kleiner wird, in eben dem Verhältnisse, als sein Nenner zunimt (§. 73).

L. Recht! Könte man nun den Nenner so groß machen, daß er nicht grösser werden könte, das heisst, unendlich groß, wie würde alsdan der Bruch beschaffen seyn?

S. Wird der Nenner unendlich groß, so wird der Bruch unendlich klein.

L. Läsft sich aber eine unendlich grosse Zahl angeben?

S. Nein. Und wenn man eine Reihe Ziffern schriebe, die bis nach Peking, ja bis an den Mond reichte, so käme es nur auf eine Null an, um sie zehn Mal so groß zu machen.

L. Ganz Recht! Es gibt keine unendlich grosse Zahl. Es läßt sich keine dergleichen angeben, sondern bloß denken. Und um den Begriff, oder den Gedanken, auszudrukken, hat man ein Zeichen dazu erdacht, nämlich eine liegende ∞. Diese bedeutet also eine unendlich grosse Zahl. Was wird nun der Bruch $\frac{1}{\infty}$ vorstellen?

S. Eine unendlich kleine Zahl.

§. 174.

L. Wird der Nenner unendlich groß, so wird der Bruch unendlich klein (§. 173), das leitet schon zu dem GegenSatze: Wird der Nenner unendlich klein = =

S. So wird der Bruch unendlich groß.

L. Allein die erwiesene Richtigkeit eines Satzes berechtigt nicht, den Gegensatz für wahr anzunehmen; sondern dieser erfodert seinen eigenen Beweis. Es ist demnach

$$\frac{1}{16:2} = \frac{1}{8} = \text{doppelt } \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{8:2} = \frac{1}{4} = \text{doppelt } \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{4:2} = \frac{1}{2} = \text{doppelt } \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2:2} = \frac{1}{1} = \text{doppelt } \frac{1}{2}$$

Bis dahin wäre der Satz durch Induction bestätigt: nur von $\frac{1}{1}$ bis $\frac{1}{0}$ ist der Sprung zu groß. Wir

müssen

müssen auch da stuffenweis gehn. Was gibt es wol zwischen dem Nenner 1 und 0 für Zwischenstuffen?

S. Sehr viele, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ꝛc.

L. Recht! oder auch $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ꝛc. Und überhaupt alle ächte Brüche fallen zwischen 1 und 0. Man kan also zwischen $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{0}$ einschieben

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \times 2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ ꝛc.}$$

Und eben so $\frac{1}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{1} = 10$

$$\frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1000000}} = 1000000$$ und so fort bis ins Unendliche. — Welchen Satz kan man nun hieraus ziehn?

S. Je kleiner der Nenner wird, je grösser wird der Bruch.

L. Wenn aber der Nenner unendlich klein wird?

S. So wird der Bruch unendlich groß.

L. Gibt es denn eine unendlich kleine Zahl?

S. Der kleinste Bruch wird durch Hinzufügung einer Ziffer zu seinem Nenner, mehr als zehn Mal klei-

kleiner. Gibt es also eine unendlich kleine Zahl; so kan sie nichts anders seyn als o.

L. Ganz recht! o gilt für eine unendlich kleine Zahl. — Was wird nun der Bruch $\frac{1}{0}$ bedeuten?

S. $\frac{1}{0} = \infty$. Eine unendlich grosse Zahl.

L. Da haben wir also die Bestätigung dessen, was wir schon §. 171 aus $1 : (1 - 1) = \frac{1}{0}$ herausbrachten. — Wir haben nun der Ausdrükke des unendlich Grossen mehre. Welches sind sie?

S. $\infty = \frac{1}{0} = 1 : 0 = [1 : (1 - 1)] = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{2-2}$ ꝛc.

L. Man kan es auch $\frac{a}{0}$, $\frac{b}{0}$, $\frac{c}{0}$ ꝛc. bezeichnen. Es gibt unendlich viele Zeichen, nicht nur für das unendlich Grosse, sondern auch für das unendlich Kleine. Wie könte man dieses Lezte, das unendlich kleine, anbeuten?

S. $0 = \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty} = \frac{3}{\infty}$ ꝛc. $= \frac{a}{\infty} = \frac{0}{1} = \frac{0}{2}$ $= \frac{0}{3}$ ꝛc. $= \frac{0}{a} = \frac{0}{b} = \frac{0}{c}$ ꝛc. u. s. w.

§. 175.

Ob $\frac{2}{0} = \frac{1}{0}$
oder ob $\frac{2}{0} \angle \frac{1}{0}$

das heisst: Ob eine unendlich grosse Zahl noch könne vergrössert werden, oder nicht? ist eine Frage, die man bejahet und verneint hat. Mir scheint sie mit der: ob auch in einem ekigen Kreise alle Punkte des Umfanges von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind? ohngefähr gleiches Schlages zu seyn. Eine unendlich grosse Zahl ist ein Unding, eben so als ein ekiger Kreis; und über eines Undinges Eigenschaften zu grübeln, führt zu Unsinn.

Zweiter Abschnitt.

Von WurzelGrössen.

I. Von WurzelGrössen überhaupt.

§. 176.

L. Wenn eine Potenz in lauter gleiche Factoren zerlegt wird;

z. B. $a^2 = a \times a^1$

$a^4 = a^2 \times a^2 = a \times a \times a \times a$,

$a^6 = a^3 \times a^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a \times a$;

so heisst jeder derselben eine Wurzel. Da sich eine Potenz aber oft in mehre gleiche Factoren zerlegen lässt (wie z. B. a^4 in $a^2 \times a^2$, und in $a \times a \times a \times a$); so kan eben dieselbe auch mehre Wurzeln haben; und diese verschiedenen Wurzeln haben wieder verschiedene Benennungen. Man unterscheidet daher die Wurzeln, wie die Potenzen, nach Graden. Ist nämlich eine Potenz in zwei gleiche Factoren zerlegt, (wie a^4 in $a^2 \times a^2$, oder a^6 in $a^3 \times a^3$) so heisst einer davon (wie hier a^2, und a^3) die Wurzel des zweiten Grades, oder auch schlechtweg die zweite Wurzel: ist die Potenz aber

in

in drei gleiche Factoren zerlegt (wie a^6 in $a^2 \times a^2 \times a^2$); so heisst jeder davon die Wurzel des dritten Grades. Und das geht so fort. — Die wie vielste Wurzel ist nun a^4 von der Potenz a^8?

S. Die zweite: denn $a^8 = a^4 \times a^4$.

L. Und die wie vielste von eben dieser Potenz ist a^2?

S. Die vierte; denn $a^8 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2$.

L. Und die StammGrösse a?

S. Ist die achte Wurzel von a^8.

L. Die StammGrösse also ist zugleich Wurzel: aber ist auch, umgekehrt, jede Wurzel zugleich StammGrösse?

S. Nein. a^4 z. B., ist die zweite Wurzel von a^8, aber ist keine StammGrösse (§. 153).

L. Ganz recht! Das beweist, deucht mich, hinlänglich, daß man Ursache hat, StammGrösse und Wurzel zu unterscheiden. — Sonst ist, in Ansehung der Benennung der Wurzeln noch zu bemerken, daß man die des zweiten Grades zugleich QuadratWurzel, und die des dritten Grades CubicWurzel zu nennen pflegt. Das Wurzelzeichen ist ein verzogenes lateinisches r (weil Wurzel auf lateinisch radix heisst), in dieser Gestalt $\sqrt{}$ oder $\surd$. In der obern Oefnung desselben bemerkt

man

man den Grad der Wurzel durch eine kleine Ziffer, die der WurzelExponent heifft:

$\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ ꝛc.

Beim Quadrate indessen, wo der Exponent 2 seyn solte, pflegt man ihn wegzulassen, und $\sqrt{}$ anstat $\sqrt[2]{}$ zu schreiben. — Dem zufolge heisst denn nun $\sqrt[2]{a^6}$, oder $\sqrt{a^6}$ = ?

S. Die Wurzel des zweiten Grades, oder die QuadratWurzel aus a^6;

$$\sqrt{a^6} = a^3.$$

L. Und $\sqrt[3]{a^6}$?

S. Die dritte, oder CubicWurzel aus $a^6 = a^2$.

L. Und $\sqrt[6]{a^6} = a$, oder die Wurzel des sechsten Grades aus a^6. — Was heisst denn nun wol überhaupt die Wurzel ausziehn?

S. Es heisst eine gegebene Grösse in so viel gleiche Factoren zerlegen, als der WurzelExponent Einheiten enthält.

§. 177.

L. Eine Potenz a^4; wird zu einem höhern Grade, etwan zum dritten, erhoben, wodurch?

S. Durch Multiplication ihres Exponenten mit dem Exponenten des Grades, zu dem sie soll erhoben werden.

$$(a^4)^3 = a^{4\times3} = ^{12} \text{ (§. 161)}.$$

L.

L. Dieses Verfahren leitet uns auf das entgegengesetzte, aus a^{12} z. B. die CubicWurzel zu ziehn.

S. $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{12:3} = a^4$.

Man muß dividiren, wo man vorhin multiplicirte (§. 42).

UebungsExempel.

$\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$
$\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^2$
$\sqrt[3]{a^3} = a^{3:3} = a^1 = a$
$\sqrt[4]{a^4} = a^{4:4} = a^1 = a$
$\sqrt[4]{a^{16}} = a^{16:4} = a^4$ u. s. w.
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$

L. Um also aus jeder gegebenen Grösse, sie sei Potenz oder StammGrösse, jede verlangte Wurzel zu ziehn, wie verfährt man?

S. Man dividirt den Exponenten der Potenz durch den WurzelExponenten.

L. Wenn das aber geradeauf nicht angeht? Wenn sich der Exponent der Potenz durch den WurzelExponenten nicht ohne Ueberschuß dividiren läßt?

Z. B. $\sqrt[3]{a^8}$?

S. Da muß man die Division durch Zeichen andeuten:

$\sqrt[3]{a^8} = a^{8:3} = a^{\frac{8}{3}}$

L.

L. Man nennt dieses Verfahren, das Wurzelzeichen wegschaffen: das entgegengesetzte, $a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$, aber, das Wurzelzeichen wieder herstellen. —

Uebungsexempel.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$\sqrt[2]{a} = a^{1:2} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^2$$

$$\sqrt[4]{b^{4n}} = b^{4n:4} = b^n$$

$$\sqrt[ns]{a^{nr}} = a^{nr:ns} = a^{r:s}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{n:n} = a^1 = a$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^4}} = \frac{1}{a^{4:2}} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} \text{ (§. 165)}$$

§. 178.

L. Also $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$ (§. 177);

und $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = ?$

S. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m:n}$

L. Aber $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

und $\left(\frac{a}{b}\right)^{m:n} = \frac{a^{m:n}}{b^{m:n}}$ (§. 156)

Folg-

Folglich $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a^{m:n}}{b^{m:n}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$ (§. 177)

und $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$ } G. (§32)

Um also aus einem Bruche die Wurzel zu ziehn, ist es genug, sie aus dem Zähler allein zu ziehn?

S. Nein, man muß sie aus Zähler und Nenner ziehn. $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$

Uebungs-Exempel.

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{8^2}} = \frac{7}{8}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2}{5}$$

§. 179.

Grössen wie $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^4}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^6}$, $\sqrt{(\frac{7}{8})^2}$ u. s. w. deren Potenz-Exponenten sich durch die Wurzel-Exponenten ohne Ueberschuß dividiren lassen, heissen rational; Grössen aber wie $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3]{(\frac{7}{8})^2}$ ꝛc. wo dieses nicht angeht, heissen irrational, oder surdisch. siehe § 272.

§. 180.

§. 180.

L. Es kan sich auch der Fall ereignen, daß Wurzel aus Wurzel zu ziehn ist, z. B. $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^6})}$ heifft die QuadratWurzel aus $\sqrt[3]{a^6}$. — Welches ist sie?

S. $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^6})} = \sqrt{a^{6:3}} = \sqrt{a^2} = a$

L. Und $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^5})}$?

S. $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^5})} = \sqrt[2]{a^{\frac{5}{3}}} = a^{\frac{5}{3}:2} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

L. Und $\sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^m})}$?

S. $\sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^m})} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{r}}} = a^{\frac{m}{r}:n} = a^{\frac{m}{nr}} = \sqrt[nr]{a^m}$

L. Nun haben wir schon genug, um die Regel anzugeben, nach welcher ein doppeltes Wurzel-Zeichen in ein einfaches verwandelt wird.

S. Man multiplicirt die WurzelExponenten durch einander.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

$\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^6})} = \sqrt[2\times3]{a^6} = \sqrt[6]{a^6} = a$

$\sqrt[2]{(\sqrt[3]{a^5})} = \sqrt[2\times3]{a^5} = \sqrt[6]{a^5}$

$\sqrt[3]{(\sqrt[2]{a^5})} = \sqrt[3\times2]{a^5} = \sqrt[6]{a^5}$

§. 181.

L. Solte es wol möglich seyn, zwei Grössen mit verschiedenen WurzelExponenten,

$$\sqrt[n]{x^r} \text{ und } \sqrt[m]{y^s}$$

zu einerlei WurzelExponenten zu bringen?

S. Ja: ich darf nur erst die WurzelZeichen wegschaffen:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{x^r} &= x^{\frac{r}{n}} \\ \text{und } \sqrt[m]{y^s} &= y^{\frac{s}{m}} \end{aligned}\right\} \text{(§. 177)}$$

hierauf die gebrochenen Exponenten $\frac{r}{n}$ und $\frac{s}{m}$ unter einerlei Benennung bringen:

$$\left.\begin{aligned} x^{\frac{r}{n}} &= x^{\frac{mr}{mn}} \\ \text{und } y^{\frac{s}{m}} &= y^{\frac{ns}{mn}} \end{aligned}\right\} \text{(§. 89)}$$

Und endlich die WurzelZeichen wieder herstellen:

$$\left.\begin{aligned} x^{\frac{mr}{mn}} &= \sqrt[mn]{x^{mr}} \\ \text{und } y^{\frac{ns}{mn}} &= \sqrt[mn]{y^{ns}} \end{aligned}\right\} \text{(§. 177)}$$

L. Also $\sqrt[n]{x^r} = x^{\frac{r}{n}} = x^{\frac{mr}{mn}} = \sqrt[mn]{x^{mr}}$

und $\sqrt[m]{y^s} = y^{\frac{s}{m}} = y^{\frac{sn}{mn}} = \sqrt[mn]{y^{sn}}$

Man nennt dieses WurzelGrössen zu einerlei Benennung bringen. — Aber lässt das Verfahren sich nicht abkürzen?

S.

§. Ich darf nur jeden Exponenten, der unter eine Benennung zu bringenden Grössen, durch den WurzelExponenten der andern, multipliciren.

$$\sqrt[n]{x^r} = \sqrt[nm]{x^{rm}}$$
$$\sqrt[m]{y^s} = \sqrt[nm]{y^{sn}}$$

L. Da sich aber nicht bloß zwei, sondern auch mehrere Brüche unter eine Benennung bringen lassen (§. 90); so muß eben dieses auch, in Ansehung der WurzelGrössen Stat finden. Wie werden

$$\sqrt[n]{x^r},\ \sqrt[m]{y^s},\ \text{und}\ \sqrt[v]{z^t}$$

zu einerlei Benennung gebracht?

§. Da wird jeder Exponent durch die Wurzel-Exponenten aller übrigen multiplicirt.

$$\sqrt[n]{x^r} = \sqrt[nmv]{x^{rmv}}$$
$$\sqrt[m]{y^s} = \sqrt[nmv]{y^{snv}}$$
$$\sqrt[v]{z^t} = \sqrt[nmv]{z^{tnm}}$$

L. Und eben so verfährt man auch, wenn die Exponenten Zahlen sind:

$$\text{z. B. } \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\times2]{5^2} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$
$$\sqrt[2]{3} = \sqrt[2\times3]{3^3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

Und:

$$\sqrt{3} = \sqrt[2\times12]{3^{12}} = \sqrt[24]{3^{12}}$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\times]{5^8} = \sqrt[24]{5^8}$$
$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4\times6]{7^6} = \sqrt[24]{7^6}$$

§. 182.

L. $\sqrt[mn]{x^{mr}} = x^{\frac{mr}{mn}} = x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r}$

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. $\sqrt[mn]{x^{mr}} = \sqrt[n]{x^r}$. Das heisst: Wenn die Exponenten der Wurzel und der Potenz einerlei Factoren enthalten, so kan man diese wegstreichen.

Uebungs Exempel.

$$\sqrt[6]{a^9} = \sqrt[2\times3]{a^{3\times3}} = \sqrt[2]{a^3}$$

$$\sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[2\times3]{a^{4\times3}} = \sqrt[2]{a^4} = \sqrt[1\times2]{a^{2\times2}}$$

$$= \sqrt[1]{a^2} = a^{\frac{2}{1}} = a^2$$

Auch WurzelGrössen, die zu einerlei Benennung gebracht sind, lassen sich zuweilen aufheben, ohne ihre gleiche Benennung zu verlieren, wie das lezte Exempel §. 181 zeigt:

$$\sqrt[24]{3^{12}} = \sqrt[12\times2]{3^{6\times2}} = \sqrt[12]{3^6}$$

$$\sqrt[24]{5^8} = \sqrt[12\times2]{5^{4\times2}} = \sqrt[12]{5^4}$$

$$\sqrt[24]{7^6} = \sqrt[12\times2]{7^{3\times2}} = \sqrt[12]{7^3}$$

§. 183.

Aus $\sqrt[1]{a^2} = a^2$ (§. 182) erhellt, daß ein WurzelZeichen mit dem Exponenten 1 so viel gilt als keines. Eben dieses läßt sich auch so erweisen:

$$\sqrt[1]{a} = \sqrt[1]{a^1} = a^{1:1} = a^1 = a \text{ (§. 155).}$$

Der

Der Exponent 1 also ist unwirksam, er mag Exponent der Wurzel, oder der Potenz seyn.

§. 184.

L. $a^n b^n = (ab)^n$ (§. 157).

Was ist nun $\sqrt[n]{(a^n b^n)}$?

S. $\sqrt[n]{(a^n b^n)} = \sqrt[n]{(ab)^n} = (ab)^{n:n}$ (§. 177)
$= (ab)^1 = ab = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^n}$.

L. Also $\sqrt[n]{(ab)^n} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^n}$ (G. §. 32).

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. Die Wurzel eines Products ist ein Product aus den Wurzeln der Factoren.

Uebungs-Exempel.

$\sqrt{(ab)^4} = \sqrt{(a^4b^4)} = \sqrt{a^4}\sqrt{b^4} = a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{4}{2}}$
$= a^2b^2 = ab)^2$

$\sqrt[5]{(ab)^{15}} = \sqrt[5]{(a^{15}b^{15})} = (ab)^3 = a^3b^3$

$\sqrt[5]{(a^{15}b^{10})} = \sqrt[5]{a^{15}}\sqrt[5]{b^{10}} = a^3b^2$

$\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{(a^nb)} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b} = ab^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{(a^mb^r)} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^r} = a^{m:n}b^{r:n} = a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{r}{n}}$

§. 185.

§. 185.

L. Die Formel $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (§. 184) gibt ein Verfahren an die Hand, das wir uns merken wollen, weil es zuweilen nützlich seyn kann. Es heisst = =?

S. Wenn nur aus einem Factor (a^n) die Wurzel kan gezogen werden, so zieht man sie heraus, und setzt ihn vor das WurzelZeichen; der andere aber, (b) aus dem sie nicht kan gezogen werden, bleibt unter dem WurzelZeichen.

L. Man nennt dieses Verfahren: Eine WurzelGrösse einfacher ausdrükken. Die Benennung scheint mir der Sache nicht sehr angemessen; da sie aber einmal angenommen ist, wollen wir dabei bleiben.

UebungsExempel.

$\sqrt[2]{25a} = \sqrt[2]{5^2 a} = 5\sqrt{a}$

$\sqrt{50} = \sqrt{(25 \times 2)} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{27a} = \sqrt[3]{3^3 a} = 3\sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{64a} = \sqrt[3]{4^3 a} = 4\sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{(8 \times 2)} = \sqrt[3]{(2^3 \times 2)} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \times 2)} = 3\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{(8 \times 7)} = 2\sqrt[3]{7}$

$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(64 \times 2)} = 4\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{(16 \times 2)} = \sqrt[4]{(2^4 \times 2)} = 2\sqrt[4]{2}$

$\sqrt[4]{2048} = \sqrt[4]{(256 \times 8)} = \sqrt[4]{(4^4 \times 8)} = 4\sqrt[4]{8}$

$\sqrt[5]{32a} = 2\sqrt[5]{a}$.

L. Wir werden der Exempel nun genug haben, um die Regeln herausziehn zu können, nach welchen man verfahren muß, um eine WurzelGrösse einfacher auszudrükken.

S. Man zerfällt die gegebene Grösse in Factoren, und siht, ob einer darunter eine Potenz des Grades ist, aus dem die verlangte Wurzel kan gezogen werden. Findet sich ein solcher, so setzt man seine Wurzel vor das WurzelZeichen.

L. Wenn man aber die Potenzen nicht kennt? Wenn man z. B., nicht weiß, daß 64 die dritte Potenz der 4 ist?

S. So muß man sich eine Tafel aller Potenzen dieses Grades, welche in der gegebenen Zahl enthalten seyn können, verfertigen. Bei dem Exempel $\sqrt[2]{128}$ wird diese Tafel so aussehn:

$2^3 = 8$;
$3^3 = 27$;
$4^3 = 64$.

L. Oder man kan auch die gegebene Zahl in mehre Factoren zerlegen:

$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(64 \times 2)} = \sqrt[3]{(8 \times 8 \times 2)} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$.

Oder

Oder in alle mögliche Factoren:

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(2\times2\times2\times2\times2\times2\times2)}$$
$$= \sqrt[3]{(2^3\times2^3\times2)} = 4\sqrt[3]{2}$$

Das Verfahren wird dadurch weitläuftiger, aber nicht unrichtig. — Mit Buchstaben wird es viel kürzer.

Exempel.

$\sqrt[4]{a^4b} = a\sqrt[4]{b}$

$\sqrt[4]{a^8b} = a^2\sqrt[4]{b}$

$\sqrt[4]{a^4b^2} = a\sqrt[4]{b^2} = a\sqrt{b^1}$ (§. 182) $= a\sqrt{b}$

$\sqrt[n]{(a^{mn}b)} = a^m\sqrt[n]{b}$.

§. 186.

L. Es folgt schon von selbst, daß da sich eine WurzelGrösse einfacher ausdrükken, das heisst, ein Teil derselben sich unter dem WurzelZeichen wegschaffen lässt (§. 185); man eben so auch, wenn es erfodert wird, einen ausserhalb des Wurzeichens befindlichen Factor wieder unter dasselbe bringen könne. Z. B. $a\sqrt[n]{b}$ soll ganz unter das WurzelZeichen gebracht werden.

S. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$. — Man muß dem Factor, den man unter das WurzelZeichen bringen will, den Exponenten desselben geben.

L. Ganz recht, wenn der Factor noch keinen Exponenten hat. Gesetzt aber er hätte schon einen wie in diesem Exempel: $a^m\sqrt[n]{b}$?

S.

§ So muß ich seinen Exponenten mit dem der Wurzel multipliciren:

$$a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^{mn} b)}$$

Es ist das lezte Exempel §. 185. umgekehrt.

Uebungs-Exempel.

I. $5\sqrt{3} = \sqrt{(5^2 \times 3)} = \sqrt{(25 \times 3)} = \sqrt{75}$

II. $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(5^3 \times 3)} \times \sqrt[3]{(125 \times 3)} = \sqrt[3]{375}$

III. $4\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{4^3 a} = \sqrt[3]{64a}$

IV. $a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4 b}$

V. $a^2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^6 b}$

VI. $b^5\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^{5n} a} = \sqrt[n]{a\, b^{5n}}$

VII. $\sqrt{(2\sqrt{3})} = \sqrt{\sqrt{(2^2 \times 3)}} = \sqrt[4]{(4 \times 3)}$
(§. 180) $= \sqrt[4]{12}$

VIII. $\sqrt{(5\sqrt{10})} = \sqrt{\sqrt{(5^2 \times 10)}} = \sqrt[4]{250}$

IX. $\sqrt[r]{(5^n \sqrt{a})} = \sqrt[r]{\sqrt{(5^{2n} a)}} = \sqrt[2r]{(5^{2n} a)}$.

II. Die vier Rechnungs-Arten mit Wurzel-Grössen.

§. 187.

L. Die Addition und Subtraction der Wurzel-Grössen hat eben so wenig Schwirigkeit als die der Potenzen (§. 159). Sind nämlich die

Grössen

Grössen gleichartig (das heisst, sind die Wurzelzeichen, und die Grössen unter selbigen, gleich): so können die Operationen durch Addition und Subtraction der Coefficienten geschehn.

Additions-Exempel.

I. $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$

II. $3\sqrt{b^3} + 4\sqrt{b^3} = 7\sqrt{b^3}$

III. $\sqrt[4]{2} + -2\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2}$ (§. 132)

IV. $7\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

V.
$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 5\sqrt{6} \\ \hline 5 + \sqrt{2} \qquad\qquad - 8\sqrt{5} + 9\sqrt{6} \end{array}$$

Subtractions-Exempel.

I. $7\sqrt{5} - + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

II. $7\sqrt{5} - - 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$ (§. 133)

III. $2\sqrt[3]{a^2} - + 3\sqrt[3]{a^2} = -\sqrt[3]{a^2}$

IV.
$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 5\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{6} \end{array}$$

§. 188.

L. Wie wird man aber ungleichartige Wurzel Grössen, wie z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{a}$, oder $\sqrt{2}$ und $\sqrt{6}$, addiren und subtrahiren?

S. Das wird wol nicht anders als durch Zeichen geschehen können:

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}; \text{ und } \sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{6}; \text{ und } \sqrt{2} - \sqrt{6}$$

L. Das ist richtig Es können aber Wurzel-Grössen das Ansehn ungleichartiger haben, ohne es wirklich zu seyn. Von solcher Art sind, z. B., $\sqrt{8}$ und $\sqrt{18}$. Drükkt man diese einfacher aus (§. 185), so verschwindet ihre Ungleichartigkeit, und sie lassen sich sehr gut addiren und subtrahiren.

Uebungs-Exempel.

I. $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{(4 \times 2)} + \sqrt{(9 \times 2)}$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

II. $\sqrt{4b} + \sqrt{9b} = 2\sqrt{b} + 3\sqrt{b} = 5\sqrt{b}$

III. $\sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{(9 \times 7)} + \sqrt{(4 \times 7)}$
$= 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

IV. $\sqrt{48} - \sqrt{27} = \sqrt{(16 \times 3)} - \sqrt{(9 \times 3)}$
$= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

V. $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(64 \times 2)} + \sqrt[3]{(27 \times 2)}$
$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

VI. $\sqrt{(4a+8)} + \sqrt{(a+2)} = \sqrt{4(a+2)}$
$+\sqrt{(a+2)} = 2\sqrt{(a+2)} + \sqrt{(a+2)}$
$= 3\sqrt{(a+2)}$

VII. $\sqrt{(a^3 + a^2b)} + \sqrt{(ab^2 + b^3)} = \sqrt{}$
$(a+b)a^2 + \sqrt{(a+b)b^2} = a\sqrt{(a+b)}$
$+ b\sqrt{(a+b)} = (a+b)\sqrt{(a+b)}$.

§. 189.

L. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
und $\sqrt[n]{a^m b^r} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^r}$ } (§. 184)
Was gibt nun $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$?

S. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{(2 \times 3)} = \sqrt{6}$.

L. Und $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}$?

S. $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{(a^2 \times a^1)} = \sqrt[3]{a^{2+1}}$
$= \sqrt[3]{a^3}$.

L. Da hätten wir also die Regeln zu Multiplication der WurzelGrössen von gleicher Benennung. — Welches sind sie?

S. Man multiplicirt die Grössen unter den Zeichen mit einander, und schreibt vor das Product das gemeinschaftliche Zeichen.

L. Wie verfährt man aber mit WurzelGrössen von ungleicher Benennung? Z. B. mit $\sqrt[n]{x^m} \times \sqrt[s]{y^r}$? Welches WurzelZeichen kömt da vor das Product?

S. Die muß man erst zu einerlei Benennung bringen (§. 181).

$$\sqrt[n]{x^m} \times \sqrt[s]{y^r} = \sqrt[ns]{x^{ms}} \times \sqrt[ns]{y^{nr}} = \sqrt[ns]{x^{ms} y^{nr}}$$

Uebungs-Exempel.

I. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$

II. $\sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = \sqrt{a^2b^2} = ab$ (§. 184)

III. $\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{(8 \times 9)}$
$= \sqrt[6]{72}$

IV. $\sqrt{75} \times \sqrt{48} = \sqrt{(75 \times 48)} = \sqrt{3600}$
$= 60.$

Oder:

$\sqrt{75} \times \sqrt{48} = 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$ (§. 185)
$= 20\sqrt{9} = 20 \times 3 = 60.$

V. $\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{(a+b)} = \sqrt{[(a+b)(a+b)]}$
$= \sqrt{(a+b)^2} = a+b$

VI. $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})$

VII. $\sqrt{(3+\sqrt{2})} \times \sqrt{(3-\sqrt{2})} =$
$\sqrt{[(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})]}$

VIII. $\sqrt{(3+\sqrt{2})} \times \sqrt{(5-\sqrt{3})} =$
$\sqrt{[(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{3})]}$

IX. $(7\sqrt{3}-5\sqrt{2}) \times (5\sqrt{8}+3\sqrt{6}).$

Berechnung der vier lezten Exempel.

VI.

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{6}}{\quad -\sqrt{6}-\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{9} \qquad -\sqrt{4} = 3-2 = 1$$

VII.

$$\frac{\sqrt{[3+\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}]}$$

$$\frac{\sqrt{(9+3\sqrt{2}}}{\quad -3\sqrt{2}-\sqrt{4})}$$

$$\sqrt{(9 \qquad -\sqrt{4}) = \sqrt{(9-2)} = \sqrt{7}}$$

VIII.

$$\frac{\sqrt{(3+\sqrt{2})}}{\sqrt{(5-\sqrt{3})}}$$

$$\sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})}$$

IX.

$$\frac{7\sqrt{3} \quad -5\sqrt{2}}{5\sqrt{8} \quad +3\sqrt{6}}$$

$$35\sqrt{24} \quad -25\sqrt{16}+21\sqrt{18} \quad -15\sqrt{12}$$
$$= 35\sqrt{(4\times 6)} - 25\sqrt{4^2}+21\sqrt{(9\times 2)} - 15\sqrt{(4\times 3)}$$
$$= (35\times 2)\sqrt{6} - 25\times 4 +21\times 3\sqrt{2} - 15\times 2\sqrt{3}$$
$$= 70\sqrt{6} \quad -100 \quad +63\sqrt{2} \quad -30\sqrt{3}$$

§. 190.

L. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$ (§. 189) $= a$ (§. 177)
$\sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = \sqrt{a^2b^2} = ab$ (§. 180)
$\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{(a+b)} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$

Was kan man aus diesen Exempeln lernen?

S. Wenn zwei gleiche WurzelGrössen des zweiten Grades durch einander zu multipliciren sind; so fält das WurzelZeichen weg, und die Grösse desselben bleibt unverändert.

L. Das gibt also eine Abkürzung der Multiplication, von der wir in der Folge Gebrauch machen wollen.

UebungsExempel.

I. $\sqrt{3}\sqrt{3} = 3$

II. $\sqrt{a^3}\sqrt{a^3} = a^3$

III. $a\sqrt{b}\sqrt{b} = ab$

IV. $\frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

V. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

VI. $a\sqrt{c} \times b\sqrt{c} = abc$

VII. $\sqrt{(a-b)}\sqrt{(a-b)} = a-b$

VIII. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3+\sqrt{6}$
$-\sqrt{6}-2 = 3-2 = 1$

IX. $\sqrt{(3+\sqrt{2})}\sqrt{(3-\sqrt{2})} = \sqrt{(9+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2)} = \sqrt{(9-2)} = \sqrt{7}$

X. $\sqrt{(a^2+b^2)} \times a\sqrt{(a^2+b^2)} = a(a^2+b^2) = a^3+ab^2$

XI. $(6-6\sqrt{3})(6+2\sqrt{3})$

XII. $(\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32})^2$

Ausrechnung der beiden lezten Exempel.

XI.

$$\begin{array}{r} 6-6\sqrt{3} \\ 6+2\sqrt{3} \\ \hline 36-36\sqrt{3} \\ +12\sqrt{3}-(12\times 3) \\ \hline 36-24\sqrt{3}-36 = -24\sqrt{3} \end{array}$$

XII.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \hline 8+\sqrt{16}+\sqrt{256} \\ +\sqrt{16} \qquad +2+\sqrt{64} \\ +\sqrt{256} \quad +\sqrt{64}+32 \\ \hline 8+2\sqrt{16}+2\sqrt{256}+2+2\sqrt{64}+32 \end{array}$$

$$= 42+(2\times 4)+2\sqrt{(32\times 8)}+(2\times 8)$$
$$= 42+8+2\sqrt{(16\times 2\times 8)}+16$$
$$= 66+2\sqrt{16^2}$$
$$= 66+2\times 16$$
$$= 66+32 = 98.$$

Ober

Oder kürzer:

$$(\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32})^2=[\sqrt{(4\times2)}+\sqrt{2}+\sqrt{(16\times2)}]^2$$
$$=(2\sqrt{2}+\sqrt{2}+4\sqrt{2})^2$$
$$=(7\sqrt{2})^2=7\sqrt{2}\times7\sqrt{2}$$
$$=49\times2=98.$$

§. 191.

L. Also $\sqrt[2]{a}\times\sqrt[2]{a}=a$;

aber $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}$

was gibt das zum Producte? Auch a?

S. Nein,

$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{aa}$ (§. 183) $=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$ (§. 177)

L. Recht! Aber $(\sqrt[3]{a})^3$?

S. $(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}$
$=\sqrt[3]{a^3}=a$

L. $(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a^2}=$
$\sqrt[3]{a^3}=a$

$(\sqrt[4]{a})^4=\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a^3}=$
$\sqrt[4]{a^4}=a$

$(\sqrt[5]{a})^5=\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{a}=\sqrt[5]{a}\times$
$\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[5]{a^5}=a$

Ueberhaupt:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{a^{n-1}} = a$$

was lernt man hieraus?

S. Um aus einer Grösse das Wurzel-Zeichen wegzuschaffen, erhebt man sie zur Potenz ihres WurzelExponenten.

L. Wie geschiht das?

S Wenn man sie so viel Mal durch sich selbst multiplicirt, als der WurzelExponent 1 enthält.

UebungsExempel.

I. $(\sqrt[3]{5})^3 = 5 = \sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{3-1}$
$\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5^2}$

II. $(\sqrt[n]{3})^n = 3 = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{3^{n-1}}$

III. $\sqrt[n]{(a+b)^n} = a+b = \sqrt[n]{(a+b)}\,\sqrt[n]{(a+b)^{n-1}}$

IV. $(\sqrt[4]{a^3})^4 = a^3 = \sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[4]{a^3} =$
$\sqrt[4]{a^3}(\sqrt[4]{a^3})^{4-1}$

§. 192.

L. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$ (§. 87) $= \frac{2}{\sqrt{6}}$ (§. 188)

und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{c}\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{ac}}$

Dis

Dis Verfahren heisst: die Irrationalität (§. 179) aus dem Zähler wegschaffen. — Wie wird sie aber aus dem Nenner weggeschafft?

S. 1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{c}}{\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{ac}}{c}$

L. Das war das QuadratWurzelZeichen weggeschafft: wenn aber ein CubikWurzelZeichen wegzuschaffen wäre? Z. B. aus $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

S. 1) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2^2}}$

$= \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{(3\times4)}} = \frac{2}{\sqrt[3]{12}}$

2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3^2}}$

$= \frac{\sqrt[3]{(3\times9)}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{3}$ } (§. 191).

L. Recht! Und aus $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$ die WurzelZeichen weg?

S. 1) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{ca^{n-1}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}c}}$

2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{c^{n-1}}}{\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{c^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{ac^{n-1}}}{\sqrt[n]{c^n}} = \frac{\sqrt[n]{ac^{n-1}}}{c}$

L. Also $\frac{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}c}}$

und $\frac{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{c^{n-1}}}{\sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{c^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{ac^{n-1}}}{c}$

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. Die Irrationalität aus dem Zähler wegzuschaffen multiplicire man Zähler und Nenner durch den zur Potenz des WurzelExponenten weniger 1 erhobenen Zähler; und die Irrationalität aus dem Nenner wegzuschaffen, multiplicire man Zähler und Nenner durch den zur Potenz des WurzelExponenten weniger 1 erhobenen Nenner.

UebungsExempel.

I. $\sqrt[3]{\frac{ab}{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab})^2}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{ab})^2} = \frac{\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2x^2}} = \frac{ab}{\sqrt[3]{(abx)^2}}$

II. $\sqrt[3]{\frac{ab}{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{x^2})^2}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^4}} = \frac{\sqrt[3]{abx^4}}{\sqrt[3]{x^6}}$

$= \frac{\sqrt[3]{abx^4}}{x^2}$

III. $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{\sqrt[4]{(a+b)}\sqrt[4]{(a+b)^3}}{\sqrt[4]{(a-b)}\sqrt[4]{(a+b)^3}} = \frac{\sqrt[4]{(a+b)^4}}{\sqrt{[(a-b)(a+b)^3]}}$

$= \frac{a+b}{\sqrt[4]{(a^4+2a^3b-2b^3-b^4}}$

IV.

$$\text{IV. } \sqrt[n]{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{\sqrt[n]{(a+b)}\ \sqrt[n]{(a+b)^{n-1}}}{\sqrt[n]{a-b}\ \sqrt[n]{(a+b)^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{(a+b)^n}}{\sqrt[n]{[(a-b)(a+b^{n-1})]}}$$

$$= \frac{a+b}{\sqrt[n]{[(a-b)(a+b^{n-1}]}}$$

$$\text{V. } \sqrt{\tfrac{2}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \text{ (§. 184)} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{4}}$$

$$= \tfrac{2}{2\times 2} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{VI. } \sqrt{\tfrac{3}{12}} = \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{3}}{\sqrt{12}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Aus diesen beiden lezten Exempeln erhellt, daß zuweilen die Irrationalität aus dem Zähler und Nenner verschwindet.

§. 193.

L. Nun wollen wir einmal aus einem zusammen gesetzten Bruche

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

die Irrationalität wegzuschaffen suchen, und zwar aus dem Zähler desselben.

S. $$\frac{(1+\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$$

Das geht nicht.

L. Auf diesem Wege wenigstens nicht: wir wollen aber einen andern versuchen, und das mittelste Zeichen des Multiplicators umkehren.

S. $\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{-1}{-5-\sqrt{2}}$

L. Und nun aus dem Nenner?

S. $\frac{(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

L. Da haben wir also unsern Zwekk erreicht. Wie verfährt man nun aus einer zusammengesetzten Grösse die Irrationalität wegzuschaffen?

S. Man multiplicirt sie durch sich selbst, aber das MittelZeichen des Multiplicators in das entgegengesetzte verwandelt.

L. Recht! Und erscheinen Zähler und Nenner verneinend, wie hier, im ersten Fall, so kan man die Zeichen umkehren: denn

$$\frac{-1}{-5-\sqrt{2}} = \frac{-1 \times -1}{(-5-\sqrt{2}) \times -1)} \text{ (§. 89)} =$$

$$\frac{+1}{+5+\sqrt{2}} \text{ (§. 139).}$$

Uebungs-Exempel.

I. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{2}+\sqrt{10}}$$

II. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} =$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{15}-\sqrt{10}}{-4}$$

III. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5+2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} =$

$$\frac{-1}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

IV. $\frac{6-6\sqrt{3}}{-24} = \frac{(6-6\sqrt{3})(6+6\sqrt{3})}{-24\quad(6+6\sqrt{3})} =$

$$\frac{-72}{-144-144\sqrt{3}} = \frac{1}{2+2\sqrt{3}}$$

V. $\frac{6-6\sqrt{3}}{a-\sqrt{b}} = \frac{6-6\sqrt{3})(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} =$

$$\frac{6a-6a\sqrt{3}+6\sqrt{b}-6\sqrt{3b}}{aa-b}$$

VI. $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10})}{5-2\sqrt{6})}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{10})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{10})} =$

$$\frac{2\sqrt{30}-11}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{10}+4\sqrt{15}}$$

VII.

VII. $\frac{(2\sqrt{3} - 11)\ (2\sqrt{3} + 11)}{(-\sqrt{2} + \sqrt{3} - 5\sqrt{10} + 4\sqrt{15})\ (2\sqrt{3} + 11)} =$

$$\frac{-1}{40\sqrt{15} - 49\sqrt{10} - 89\sqrt{3} + 109\sqrt{2}}$$

L. Aus den beiden lezten Exempeln kan man lernen, daß wenn eine Grösse aus mehr als zwei Gliedern besteht (wie der Zähler in VI.), man das Verfahren wiederholen muß.

L. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (§. 189)
folglich $\sqrt{ab} : \sqrt{a} = ?$

S. $\sqrt{ab} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{ab}{a}} = \sqrt{b}$ (§. 42).

L. Und nun $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = ?$

S. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \times \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$ (§. 189).

L. Und $\sqrt[nm]{a^m b^n} : \sqrt[n]{a} = ?$

S. $\sqrt[nm]{a^m b^n} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m b^n} : \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[nm]{\frac{a^m b^n}{a^m}} = \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[m]{b}$ (§. 182).

L. Die Regeln der Division für Wurzel-Grössen ergeben sich hieraus schon. Sind die Wurzel-Exponenten gleich = ?

S.

S. So dividirt man die Grösse unter dem Wurzelzeichen des Dividendus durch die unter dem des Divisors befindliche.

L. Sind die WurzelExponenten aber ungleich = = ?

S. So muß man sie erst gleich machen (§. 181), und hierauf verfahren wie vorhin.

UebungsExempel.

A. Dividendus und Divisor einfach.

I. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a:b)} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

II. $\sqrt[3]{a^4} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{(a^4:a)} = \sqrt[3]{a^{4-1}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ (§. 177).

III. $\sqrt{a^3} : \sqrt{a^5} = \sqrt{a^{3-5}} = \sqrt{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{2}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Oder so:

$$\sqrt{a^3} : \sqrt{a^5} = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}} = \frac{1\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{a}$$

IV. $b : \sqrt{ab} = \sqrt{bb} : \sqrt{ab} = \sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

V. $\sqrt[n]{a^m b^r} : \sqrt[n]{b^r} = \frac{\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^r}}{\sqrt[n]{b^r}} = \sqrt[n]{a^m}$

VI. $\sqrt[ns]{x^{ms} y^{nr}} : \sqrt[n]{x^m} = \frac{\sqrt[ns]{x^{ms}} \times \sqrt[ns]{y^{nr}}}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{\sqrt[n]{x^m} \times \sqrt[s]{y^r}}{\sqrt[n]{x^m}}$ (§. 182) $= \sqrt[s]{y^r}$

VII.

VII. $ab\sqrt{ce} : bf\sqrt{ge} = \frac{ab \times \sqrt{c}\sqrt{e}}{bf \times \sqrt{g}\sqrt{e}} = \frac{a\sqrt{c}}{f\sqrt{g}}$

$= \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$

VIII. $5^a\sqrt{2} : \sqrt{2} = 5^a$

IX. $4a\sqrt{2} : 2 = 2a\sqrt{2}$

X. $\sqrt{96} : \sqrt{8} = \sqrt{(96 : 8)} = \sqrt{12} =$

$2\sqrt{3}$ (§. 85)

XI. $\sqrt{75} : \sqrt{48} = \sqrt{\frac{25}{16} \times \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{25}{16}} =$

$\sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \frac{5}{4}$

XII. $6\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 6 : 2 = 3$

XIII. $\sqrt[3]{24} : 2 = \frac{\sqrt[3]{8 \times 3)}}{2} = \frac{\sqrt[3]{(2^3 \times 3)}}{2} =$

$\frac{2\sqrt[3]{3}}{2} = \sqrt[3]{3}$

XIV. $\sqrt[3]{24} : \sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{24^2} : \sqrt[6]{2^3}$ (§. 181)

$= \frac{\sqrt[6]{(24 \times 24)}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{(24 \times 3)} = \sqrt[6]{72}$

XV. $\sqrt[3]{ab} : \sqrt[2]{a} = \sqrt[6]{a^2b^2} : \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{\frac{a^2b^2}{a^2a}}$

$= \sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}$

XVI. $8\sqrt{15} : 2\sqrt{5} = \frac{4 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{5}} =$

$4\sqrt{3} = \sqrt{(16 \times 3)} = \sqrt{48}$ (§. 177)

XVII.

XVII. $5\sqrt{3} : 7\sqrt{5} = \frac{\sqrt{(5\times5\times3)}}{\sqrt{(7^2\times5)}} = \sqrt{\frac{5\times3}{7\times7}}$

$= \sqrt{\frac{15}{49}} = \frac{\sqrt{15}}{7}$

XVIII. $8\sqrt{35a^3} : 2\sqrt{5a} = \frac{4\times2\times\sqrt{(7\times5\times a^3)}}{2\times\sqrt{5a}}$

$= 4\sqrt{7a^2}$

B. Dividendus zusammengesetzt, Divisor einfach.

I. $(\sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{12}) : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{15}{3}} - \sqrt{\frac{6}{3}} + \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{4} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + 2.$

II. $(2\sqrt{25a^2} - 4\sqrt{40a} + 6\sqrt{5ax^m}) : 2\sqrt{5a}$

$= \sqrt{5a} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{x^m}$

III. $(a^3 + ab^2) : a\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{a^3}{a\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{ab^2}{a\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

$= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ (§. 190)

$= \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}\ \sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \sqrt{(a^2+b^2)}$

Eben

Eben dieſes auf andre Art:

$$(a^3 + ab^2) : a\sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{a^3 + ab^2}{a\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

$$= \frac{a(a^2 + b^2)}{a\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$ nun wie vorhin.

Noch auf andre Art:

$$(a^3 + ab^2) : a\sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{a^3+ab^2}{a\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$= \frac{(a^3+ab^2)}{a\sqrt{(a^2+b^2)}} \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{(a^3+ab^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{a(a^2+b^2)}$$ (§. 190)

$$= \frac{(a^3+ab^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^3+ab^2} = \sqrt{(a^2+b^2)}$$

C. Dividendus und Diviſor zuſammengeſetzt.

I. $(a^2b^2 - a^2b) : (ab - a\sqrt{b})$.

II. $(\sqrt{10} + \sqrt{60} + \sqrt{18y} + \sqrt{108y} - 4 - \sqrt{96}) : (\sqrt{2} + \sqrt{12})$.

III. $[a^3 + ab^2 + ab\sqrt{(a^2+b^2)}] : [\sqrt{(a^2+b^2)} + b]$

Berechnung der Exempel C.

I.

$$(a^2b^2 - a^2b) : (ab - a\sqrt{b}) = ab + a\sqrt{b}$$

$$\begin{array}{r} a^2b^2 - a^2b\sqrt{b} \\ \hline + a^2b\sqrt{b} - a^2b \\ + a^2b\sqrt{b} - a^2b \\ \hline 0 \end{array}$$

II.

II.

$(\sqrt{2}+\sqrt{12})$ (Divisor)

$\sqrt{10}+\sqrt{60}+\sqrt{18y}+\sqrt{108y}-\sqrt{16}-\sqrt{96} \mid \sqrt{5}+\sqrt{9y}-\sqrt{8}$

$\sqrt{10}+\sqrt{60}+\sqrt{18y}+\sqrt{108y}-\sqrt{16}-\sqrt{96}$

0 0 0

III.

$a^3+ab^2+ab\sqrt{(a^2+b^2)} : \sqrt{(a^2+b^2)}+b = a\sqrt{(a^2+b^2)}$

$a^3+ab^2+ab\sqrt{(a^2+b^2)}$

0

§. 195.

L. Nun wollen wir einmal $3+\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$ dividiren.

S. $(3+\sqrt{2}):(1+\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}+4-4\sqrt{2}-8$

$3+3\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}-4$

$+4$

$+4+4\sqrt{2}$

$-4\sqrt{2}$

$-4\sqrt{2}+8$

-8

$-8-8\sqrt{2}$

$+8\sqrt{2}$

L.

L. Es ist schon sichtbar daß die Division kein Ende nimt. Man kan es noch auf andre Art versuchen: Z. B.

$$(\sqrt{2}+3):(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+2 - 2\sqrt{2}+4-4\sqrt{2} \text{ ꝛc.}$$

Aber der Quotient nimt auch kein Ende. Wir müssen daher zu einem andern Mittel schreiten, und die Irrationalität aus dem Divisor wegschaffen.

S. $(3+\sqrt{2}):(1+\sqrt{2}) = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{5+\sqrt{2}}{1}$

(§. 193) $= 5+\sqrt{2}$

L. Recht! Als UebungsExempel können alle Exempel §. 193 dienen, entweder wie sie da stehn, oder auch umgekehrt; zu verstehn der Zähler in den Divisor, und der Nenner in den Dividendus verwandelt.

UebungsExempel (§. 193).

I. $(1-\sqrt{5}):(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3}-\sqrt{15} - \sqrt{2}+\sqrt{10}):1 = \sqrt{3}-\sqrt{15} - \sqrt{2}+\sqrt{10}.$

II. $(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(1-\sqrt{5}) = (\sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{15}-\sqrt{10}):-4$

III. $(5+2\sqrt{6}):(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

IV. $-24:(6-6\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}.$

Und so die übrigen dieses Paragraphs.

Aber auch die §. 194 C. lassen sich nach dieser Art behandeln:

Uebungs-Exempel (§. 194, C.)

I. $\frac{(a^2b^2 - a^2b)\ (ab + a\sqrt{b})}{(ab - a\sqrt{b})\ (ab + a\sqrt{b})} = ab + a\sqrt{b}$

II. $\frac{(\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{2y} + \sqrt{3y} - 4 - 4\sqrt{6})(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\qquad\qquad(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}$

$= \frac{10\sqrt{5} + 20\sqrt{2} - 30\sqrt{y}}{-10} = \sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{y}$

III. $\frac{[a^3 + ab^2 + ab\sqrt{(a^2 + b^2)}]\ [\sqrt{(a^2 + b^2)} - b]}{[\sqrt{(a^2 + b^2} + b]\qquad\qquad[\sqrt{(a^2 + b^2)} - b]} =$

$\frac{a^3\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a^2} = a\sqrt{(a^2 + b^2)}$

Noch ein Exempel.

$(x^3 - 6x^2 + 14x - 24) : 8\sqrt{(x - 4)}$

$= \frac{(x^3 - 6x^2 + 14x - 24)\ \sqrt{(x - 4)}}{8\sqrt{(x - 4)}\qquad\qquad\sqrt{(x - 4)}} =$

$= \frac{(x^3 - 6x^2 + 14x - 24)\ \sqrt{(x - 4)}}{8\ (x - 4)} =$

$= \frac{(x^2 - 2x + 6)\ \sqrt{(x - 4)}}{8}$

Dritter Abschnitt.

Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten WurzelGrössen.

I. Ausziehung der QuadratWurzel.

§. 196.

L. Wenn man sich eine Grösse in zwei Teile zerlegt vorstellt, und diese Teile $a + b$ nennt, so ist das Quadrat davon = ?

S. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

L. Diese Zeichen in Worte verwandelt, heissen: Das Quadrat einer zweiteiligen Wurzel $(a+b)^2$, besteht

1) aus dem Quadrate jedes Teils (a^2+b^2)
2) aus dem doppelten Producte beider Teile in einander $(2ab)$.

Um dieses durch Zahlen verständlicher zu machen, wollen wir $a+b=5$ annehmen, und die Zahl 5 in zwei Teile zerlegen. Diese Abteilung ist willkührlich. Nimt man $a=1$, so ist $b=4$; ist $a=2$, so ist $b=3$; und ist $a=3$ = ?

S.

S. So ist b = 2

L Es sei also a = 3,

b = 2;

so ist a+b = 5

(a+b)² = a² + 2ab + b²

= (3+2)² = 3² + 2(3×2) + 2²

= 9 + 12 + 4

= 25 = 5²

Oder nimt man a = 1,,?

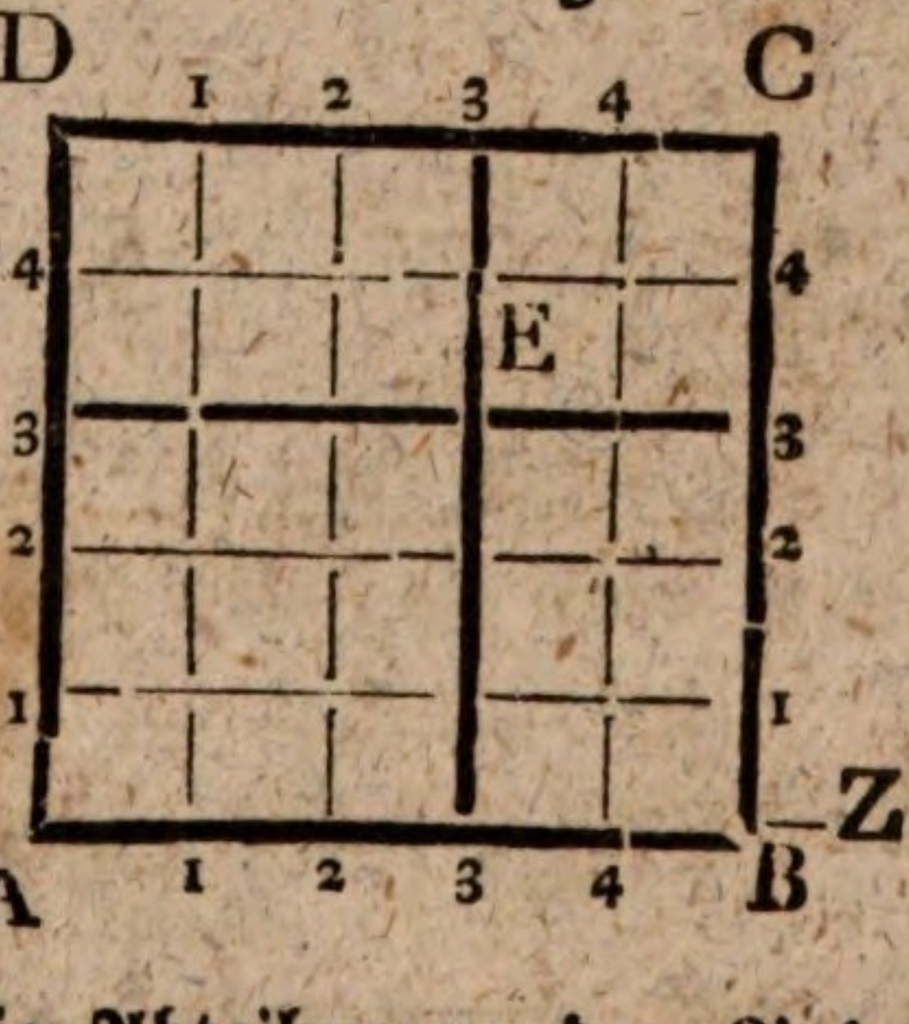
S. So ist b = 4

(a+b)²=(1+4)² = 1² + 2(1×4) + 4²

= 1 + 8 + 16

= 25 = 5²

L. Noch auf andre Art läßt sich die Sache so vorstellen. Man zieht eine unbestimmte Linie AZ; trägt auf selbige von A nach B fünf willkührliche, aber gleiche Teile; beschreibt über AB ein Quadrat ABCD (§. 135); trägt auf jede Seite desselben die Abteilungen der Linie AB, verbindet die einander gegenüber stehenden TeilungsPunkte 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3, 4 und 4, durch gerade Linien: so wird das grosse Quadrat ABCD in lauter kleinere Quadrate zerschnitten. Und wie viele sind dieser kleinern?



S. $5 \times 5 = 25 = 5^2$.

L. Da haben wir also den Aufschluß, warum eine durch sich selbst multiplicirte Grösse Quadrat genannt wird. Wil man sich auch von den Abteilungen $a^2 + 2ab + b^2$, oder $3^2 + 2 \times 6 + 2^2$ einen Begriff machen, so darf man nur die Seiten des Quadrats eben so abteilen als die Zahl 5, hier in 3 und 2 gleiche Teile. Bezeichnet man nun den DurchschnittsPunkt der Linien 3, 3, und 3, 3, welche diese Abteilungen machen, mit E; so ist

$$\left.\begin{aligned} EA &= a^2 = 3^2 = 9 \\ EC &= b^2 = 2^2 = 4 \end{aligned}\right\} = 25$$
$$EB + ED = 2ab = 2 \times (2 \times 3) = 12$$

§. 197.

L. Also $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: was wird denn $(a-b)^2$ seyn?

S. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

L. Und $(-a+b)^2$?

S. $(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Eben wie vorhin.

L. Also $(+a-b)^2 = (-a+b)^2$ (S. §. 31) Das scheint widersinnig. Wir wollen es einmal in Zahlen versuchen. Es sei $a = 3$, und $b = 2$.

S. So ist $(a-b)^2=(3-2)^2=+1^2=+1$

und $(-a+b)^2=-3+2=-1^2=+1$

L. Es erhellet hieraus, daß ein Quadrat wie $a^2-2ab+b^2$ zwei Wurzeln habe, nämlich a—b, und b—a.

§. 198.

L. Wie wird das Quadrat einer dreiteiligen Wurzel, $a+b+c$, gefunden?

S. Durch Multiplication mit sich selbst. (§. 153)

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ +ab+b^2+bc \\ +ac+bc+c^2 \\ \hline a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \end{array}$$

L. Das ist mühsam, und noch mühsamer wird es, das Quadrat einer vierteiligen, fünfteiligen ꝛc. Wurzel nach dieser Art zu berechnen. Es gibt ein kürzeres Mittel, die Quadrate mehrteiliger Wurzeln zu finden, mit dem wir uns bekant machen wollen. Man nimt nämlich das Quadrat einer zweiteiligen Wurzel zum Muster, und formt nach ihm alle andere Quadrate. Verlange ich, z. B., das Quadrat

einer dreiteiligen Wurzel a+b+c; so denke ich es mir zweiteilig, so daß ich a+b für den ersten Teil, oder für a, und c für den zweiten, b, annehme. So ist nun $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

Verlange ich das Quadrat einer vierteiligen Wurzel; so nehme ich a+b+c für den ersten, und d für den vierten Teil an:

$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$

Wer kan nun das Quadrat einer fünfteiligen Wurzel angeben?

S. $(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)e+e^2$

L. Ganz recht! — Wird es erfodert, so sind die hier vorkommenden abgekürzten Formeln leicht in ausführlichere umzuschaffen.

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

Nun die Ausdrükke für das Quadrat einer vierteiligen Wurzel a+b+c+d?

S. $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$
$= a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2$

L. Zu bequemerer Uebersicht wollen wir die gefundenen Quadrate, in abgekürzter Form, neben einander stellen:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$$
$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+2(a+b+c+d)e+e^2$$

Es erhellt aus diesen vier Exempeln schon hinlänglich, nach welchem Gesetze die Quadrate wachsen. So oft, nämlich, zu der Wurzel ein neuer Teil komt; so kommen zu dem Quadrate zwei Stükke. — Welches sind diese?

S. Erstens, das doppelte Product aus der Summe aller vorhergehenden Teile in den neuen Teil; und zweitens, das Quadrat des neuen Teils.

L. Recht! Das Quadrat einer mehrteiligen Wurzel besteht also . . ?

S. 1) aus dem Quadrate jedes Teils ($a^2+b^2+c^2$ ꝛc.)

und

und 2) aus dem doppelten Producte der Summe aller vorhergehenden Teile in jeden folgenden Teil.

$[2ab + 2(a + b)c + 2(a + b + c)d$ &c.]

§. 199.

L. Nun wollen wir einmal mit Ausziehung der QuadratWurzel einen Versuch machen, und dazu das bekante Quadrat $aa + 2ab + bb$ nehmen. — Der erste Teil der Wurzel ist leicht herauszufinden. Welcher ist es?

S. Er ist $\sqrt{a^2} = a$.

L. Recht! Den $\sqrt{(aa+2ab+bb)} = a+b$ schreiben wir hinter das Gleichheitszeichen; sein Quadrat aber schreiben wir unter aa, um es davon abzuziehen.

aa	
	$+2ab+bb$
$(+2a$	$+b)$ Divisor.
	$+2ab+bb$
	0

S. Bleibt $2ab + bb$.

L. Den ersten Teil der Wurzel, a, haben wir nun: wie finden wir aber den zweiten, b?

S. $2ab+bb=(2a+b)b$. Ich muß also, um b zu erhalten, $2ab+bb$ durch $2a+b$ dividiren.

L. Der Einfall ist gut, aber nicht ausführbar, weil b noch nicht bekant ist. Wenn wir es gleich vorauswissen, so dürfen wir uns doch nicht merken lassen, daß wirs wissen. Also, was nun für Rat?

S So müssen wir vorläufig nur mit $2a$ in $2ab$ dividiren, und wenn wir auf solche Art den Quotienten, b, gefunden haben, den unvollständigen Divisor $2a$ dadurch ergänzen, so daß er $2a+b$ wird.

L. So ist es recht! Dem Divisor gibt man seine Stelle unter dem Dividendus; und man kan ihn, wenn man ihn nicht mehr braucht, durchstreichen, oder in Klammern einschliessen.

UebungsExempel.

I. $\sqrt{(a^2+6ab+9b^2)}$

II. $\sqrt{(4aa-4ab+bb)}$

III. $\sqrt{(9bb+24bc+16cc)}$

Berechnung.

I.

$$\sqrt{(aa + 6ab + 9bb)} = a + 3b$$

$$\begin{array}{r|l} aa & \\ \hline & +6ab+9bb \\ & (+2a+3b) \\ & +6ab+9bb \\ \hline & 0 \end{array}$$

II.

$$\sqrt{(4aa - 4ab + bb)} = 2a - b$$

$$\begin{array}{r|l} 4aa & \\ \hline & -4ab+bb \\ & (+4a-b) \\ & -4ab+bb \\ \hline & 0 \end{array}$$

III.

$$\sqrt{(9bb + 24bc + 16cc)} = 3b + 4c$$

$$\begin{array}{r|l} 9bb & \\ \hline & +24bc+16cc \\ & (+6b+4c) \\ & +24bc+16cc \\ \hline & 0 \end{array}$$

§. 200.

L. Nun wollen wir es auch mit Quadraten mehrteiliger Wurzeln versuchen. Zuerst einer dreiteiligen:

$\surd(aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc)$

S. $(aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc)=a+b+c$

aa

$+2ab+bb$

$(+2a +b)$

$+2ab+bb$

$+2ac+2bc+cc$

$=(2a+2b+c)c$

$(+2a+2b+c)$

$+2ac+2bc+cc$

0

Uebungs-Exempel.

I. $\surd(aa+2ab-2ac+bb-2bc+cc)$

II. $\surd(a^4+2a^3+3aa+2a+1) = aa+a+1$

III. $\surd(a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4)=aa-2ab-2bb$

Berechnung des ersten Exempels.

$\surd(aa+2ab-2ac+bb-2bc+cc)=a+b-c$

aa

$+2ab-2ac+bb$

$(+2a +b)$

$+2ab +bb$

$-2ac -2bc+cc$

$(+2a +2b -c)$

$-2ac -2bc+cc$

0

§. 201.

L. Solten die Regeln zu Ausziehung der QuadratWurzel angegeben werden, so würden es folgende seyn:

1) Sind die Glieder des Quadrats nach den Potenzen gehörig geordnet, so enthält das vorderste Glied = =?

S. Das Quadrat des ersten Teils der Wurzel.

L. Hat man nun diesen heraus, wie verfährt man weiter?

S. 2) Man verdoppelt den gefundenen ersten Teil der Wurzel, und dividirt damit in das nun folgende Glied. Der Quotient gibt den zweiten Teil der Wurzel, der zwei Mal geschrieben wird: zuerst als zweiter Wurzelteil; und dan als Ergänzung des Divisors.

L. Recht bis dahin! Aber wenn die Wurzel aus mehr als zwei Teilen besteht?

S. Dan betrachte ich alle bereits gefundenen Teile als den ersten, und verfahre wie bei 2).

§. 202.

L. Die Ausziehung der QuadratWurzel in Zahlen, ist der in Buchstaben ähnlich. Es wird z. B., die QuadratWurzel verlangt aus 900+360+36!

S.

S. $\sqrt{(900+360+36)}$
$=\sqrt{\begin{pmatrix}30^2+2\times 180+6^2\\30^2\end{pmatrix}}=30+6=36$

$+2\times 180+6^2$
$+(2\times 30+6)$
$2\times 180+6^2$

0

L. Gesetzt aber, es würde aus 1296 die Wurzel verlangt?

S. Die weis ich nicht zu finden.

L. Es ist gleichwol die vorige Zahl: Denn

$900+360+36=1296.$

Die einzelnen Teile des Quadrats, welche vorhin getrennt waren, sind izt in eine Masse geschmelzt. Die Kunst bestehet also darin, die zusammen geworfenen Teile wieder auseinander zu finden.

§. 203.

L. Ein Quadrat einer einziffrigen Wurzel, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, wie viel Ziffern kan das haben?

S. Es kan eine Ziffer, es kan auch zwei Ziffern haben.

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$; aber $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$.

L. Wenn aber an der Wurzel Nullen hangen? Wenn die Wurzel, z. B. wäre, 10, 100, 1000, 10000; oder 20, 200, 2000; 90, 900, 9000 ꝛc. wie viel Nullen wird dan das Quadrat haben?

S. Doppelt so viel als die Wurzel (§. 23).

Denn $10^2 = 100$

$100^2 = 10000$

$1000^2 = 1000000$

$90^2 = 8100$

$900^2 = 810000$

$9000^2 = 81000000.$

L. Das Quadrat hat also so viel Pare von Nullen, als die Wurzel einzelne Nullen enthält. Dazu kömt noch das Quadrat der vor den Nullen stehenden Ziffer, welches besteht = =

S. Aus einer einzelnen Ziffer, oder einem Par Ziffern.

L. Teilt man daher ein Quadrat, dessen Wurzel eine geltende Ziffer mit Nullen hat, von der Rechten gegen die Linke, parweis in Fächer oder Classen

4|00|00

oder 81|00|00|00

so erhält man solcher Abteilungen oder Fächer so viele, als die Wurzel Ziffern hat.

§. 204.

L. Wie aber, wenn Wurzel und Quadrat nicht mit Nullen, sondern mit andern Ziffern, schliessen? Z. B. Das Quadrat von 11, von 36, von 99, von 111, von 999 u. s. w. wie viel Ziffern wird das haben?

S. Eben so viel, als ob es mit Nullen schlösse: denn die geltenden Ziffern vertreten hier die Stellen der Nullen.

L. Das ist noch nicht so ganz klar. Zwischen 90^2 und 99^2, z. B., ist ein beträchtlicher Unterschied: denn

$$99^2 = (90+9)^2 = 90\times90+2(90\times9)+9\times9$$

aber $90^2 =$ ist nur $= 90\times90$

Es kömt also zu 90^2, wenn es 99^2 werden soll, noch hinzu : : ?

S. $2(90\times9)+9\times9 = 1620+81.$

L. Recht! Und nun ist die Frage: ob diese beiden Producte nicht die Zahl der Ziffern vermehren, so daß das Quadrat von 99 mehr Fächer erhalte, als die Wurzel Ziffern hat?

S.

S. Das wollen wir gleich ausforschen.

$99^2 = (90+9)^2 = 90^2 + 2(90\times9) + 9^2$

$90^2 = 8100$

$2(90\times9) = 1620$

$9^2 = 81$

$99^2 = 98|01$

L. Nun müssen wir es auch von 999^2 wissen.

S. $999^2 = (900+90+9)^2 = 900^2 + 2(900\times90) + 90^2 + 2(990\times9) + 9^2$

$900^2 = 810000$

$90^2 = 8100$

$9^2 = 81$

$2(900\times90) = 162000$

$2(990\times9) = 17820$

$999^2 = 99|80|01$

L. Nun müsten wir noch mit 9999, mit 99999 ꝛc. Versuche anstellen; aber es würde zu weitläuftig seyn. — Wir wollen daher den Beweis abkürzen, und setzen 9999^2 hätte mehr als acht Ziffern, und wollen die möglichst kleinste neunziffrige Zahl dafür annehmen. Welches ist die?

S. 1|00|00|00|00.

L. Recht! Und das Quadrat von 10000?

S. $10000^2 = 100000000$.

L. Da hätten wir also $9999^2 = 100000000 = 10000^2$ welches eine offenbare Ungereimtheit ist: weil grössere Wurzeln grössere Quadrate haben als kleinere, $[r^2 \angle (r+n)^2]$. Wenn man also eine QuadratZahl parweis in Fächer zerschneidet, so erhält man der Fächer so viele=?

S. Als die Wurzel Ziffern hat.

L. Wohl zu merken, jedoch, daß für das lezte Fach auch eine Ziffer bleiben kan. —

§. 205.

L. Nun wollen wir ein par Quadrate zweiziffriger Wurzeln, 22^2 und 99^2, nach allen Teilen aus denen sie zusammen gesetzt sind, neben einander stellen, um zu sehen, wo die geltenden Ziffern dieser Teile eigentlich ihre Stelle haben. Es sei demnach

a^2	$= 20^2$	$= 4$	00	a^2	$= 90^2$	$= 81$	00
b^2	$= 2^2$	$=$	4	b^2	$= 9^2$	$=$	81
$2ab$	$= 2(20\times2)$	$=$	80	$2ab$	$= 2(90\times9)$	$= 16$	20
$(a+b)^2$	$= 22^2$	$= 4$	84	$(a+b)^2$	$= 99^2$	$= 98$	01

Nun

Nun ein par Quadrate dreiziffriger Wurzeln, 222^2 und 999^2, auf eben die Art neben einander gestellt:

$a^2 =$	$200^2 =$	4	00	00	$900^2 =$	81	00	00
$b^2 =$	$20^2 =$		4	00	$90^2 =$		81	00
$c^2 =$	$2^2 =$			4	$9^2 =$			81
$2ab =$	$2(200\times20) =$		80	00	$2(900\times90) =$	16	20	00
$2(a+b)c =$	$2(220\times2) =$		8	80	$2(990\times9) =$	1	78	20
$(a+b+c)^2 =$	$222^2 =$	4	92	84	$999^2 =$	99	80	01

An diesen Exempeln ist zu sehen, wo die verschiedenen Teile aus denen die Quadrate zusammen gesetzt sind, ihren Platz haben. In jedem Fache, nämlich, stekkt das Quadrat eines einzelnen Teils. Seine niedrigsten Ziffer hat es in der niedrigsten Stelle jedes Fachs; seine höchste aber, (wenn es zweiziffrig ist) in der höchsten Stelle des Faches. — Aber die doppelten Producte, wo haben die ihren Sitz?

S. Die sind mit den Quadraten vermischt, haben ihre niedrigste Ziffer in der höchsten Stelle jedes Fachs, und erstrekken sich da weiter links.

L. Ist das aber immer so, daß die Quadrate in der niedrigsten, die doppelten Producte in der höchsten Stelle eines Faches anfangen?

S. Ja, denn die Quadrate haben immer das erste keine, die andern Pare von Nullen hinter sich: die doppelten Producte dagegen haben Unpare von Nullen.

§. 206.

L. Nun können wir zur Ausziehung der Quadrat-Wurzeln schreiten: denn wir wissen nun voraus, nicht nur wie viel Ziffern die jedesmalige Wurzel haben wird (§. 203); sondern auch, wo das Quadrat jeder einzelnen Ziffer anzutreffen ist (§. 204). Zum Versuche wollen wir das schon bekante Quadrat 1296 nehmen, und damit verfahren, als ob wir es noch nicht kennten. Da die Wurzel zweiziffrig ist, so wird es das Verfahren sehr erleichtern, wenn wir uns das Quadrat einer zweiteiligen Wurzel vor Augen stellen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$$

Was folgt nun weiter?

S. Die Abteilung in Fächer. — Im höchsten Fache 12 steckt das Quadrat der höchsten Wurzel-Ziffer. Ich suche also das nächst kleinere Quadrat auf, welches 9 ist, und schreibe es darunter. Die Wurzel von 9 ist 3. Das Quadrat 9, abgezogen von 12, bleibt 3. Zu dieser 3 das folgende Fach herunter, gibt $396 = 2ab + b^2$. Um nun b zu finden, dividire ich mit $2a = 60$ in 396, gibt $6 = b$. Diese 6 neben 2a, in die Stelle der 0,

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12}\,|\,96 & a+b \\ 9\,| & = a^2 \\ \hline 396 & = (2a+b)b \\ 66 & = 2a+b \\ \hline 396 & = (2a+b)b \\ \hline 0 & \end{array} \qquad = 30+6 = 36$$

gibt den vollständigen Divisor 66 = 2a + b. Diesen durch b = o multiplicirt gibt 396 = (2a + b)b. Abgezogen von dem Dividendus 396 bleibt o.

Uebungs-Exempel.

I. $\sqrt{5|76} = 24$

$\underline{4|} \quad = a^2$

1 76 = (2a + b)b

44 = 2a + b

1 76 = (2a + b)b

0

II. $\sqrt{7|64} = 42$

$\underline{16|}$

1 64

82

1 64

0

III. $\sqrt{57|76} = 76$

$\underline{49|}$

8 76

x 46

8 76

0

IV. $\sqrt{75|69} = 87$

$\underline{64|}$

11 69

x 67

11 69

0

V.

V. $\sqrt{92|16} = 96.$
VI. $\sqrt{9604} = 98.$

§. 207.

L. Nun zur Ausziehung mehrteiliger Wurzeln! Es wird gegeben das Quadrat

119025:

wie viel Ziffern wird dessen Wurzel haben?

S. Dreie (§. 203).

L. Was ist also zuerst zu tuhn?

S. Ich schreibe mir das Muster einer dreiteiligen Wurzel hin; teile hierauf die Zahl in Fächer, und verfahre, um die beiden ersten Wurzel-Teile (a+b) zu erhalten, wie vorhin (§. 205) Das nächst kleinere Quadrat

$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 +$
$2(a+b)c + c^2$
$= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$

$a+b+c$
$\sqrt{11|90|25} = 300 + 40 + 5 = 345$
$9|\,\cdot\cdot\,|\,\cdot\cdot = a^2$

$2\,90\,\cdot\cdot = (2a+b)b$
$\not{64}\,\cdot\cdot = 2a+b$
$2\,56\,\cdot\cdot = (2a+b)b$

$3425 = (2a+2b+c)c$
$\not{885} = 2a+2b+c$
$3425 = (2a+2b+c)c$

0

von 11, ist 9. Dessen Wurzel ist 3. Deren Quadrat 9, abgezogen von 11, lässt 2. Dazu das folgende Fach herunter, gibt 290 : 2. Darin steckt (2a+b)b und vielleicht noch etwas von dem Producte 2(a+b)c. Um b zu finden, dividire ich durch 2a=600, und erhalte zum Quotienten 40. Der Divisor 600, ergänzt durch diese 40, gibt 640= 2a+b. Multiplicirt durch 40=b, gibt 25600 = (2a+b b. Abgezogen von 29025, bleibt 3425 = 2(a+b+c)c. Um c zu finden, dividire ich mit 2(a+b) = 2 × 340 = 680; gibt 5=c. Der vollständige Divisor 685 = 2(a+b+c) durch 5=c multiplicirt, gibt 3425 = 2(a+b+c)c. Abgezogen von 3425 = 2(a+b+c)c bleibt nichts.

Uebungs-Exempel.

A. Dreiziffrige Wurzeln.

$(a+b+c)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$

I. $\sqrt{28|94|44} = 538$

25

394

X03

309

8544

X068

8544

0

II.

II. $\sqrt{16|08|01} = 401$

16|

08
80
0

801
80x
801

0

III. $\sqrt{366025} = 605$

IV. $\sqrt{822649} = 907.$

B. Vierziffrige Wurzeln.

$(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$
$+2(a+b+c)d+d^2$
$= a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b$
$+2c+d)d$

I. $\sqrt{18|25|85|29} = 4273$

16|..|..|..

2.25..
82...
164...

6.18.5..
847
5929

25629
8543
25629

0

II.

II. $\sqrt{5929225} = 2435$

III. $\sqrt{11943936} = 3456$

IV. $\sqrt{5308416} = 2304$

V. $\sqrt{64112049} = 8007.$

C. Fünfziffrige Wurzeln.

$(a+b+c+d+e)^2 = a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d+(2a+2b+2c+2d+e)e.$

I. $\sqrt{56|76|41|69|64} = 75342$

II. $\sqrt{8245911249} = 90807.$

D. Sechsziffrige Wurzeln.

$(a+b+c+d+e+f)^2 = a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d+(2a+2b+2c+2d+e)e+(2a+2b+2c+2d+2e+f)f.$

I. $\sqrt{643368800609} = 253647$

II. $\sqrt{343328027364} = 585942.$

§. 208.

So lange man im WurzelAusziehn nicht sehr geübt ist, oder auch im Fall man es wieder vergessen hätte, ist das Vorzeichnen eines Formulars ($a^2 \pm 2ab+b^2$ ꝛc.) sehr nüzlich. Doch ist, auch

bei

bei mehrteiligen Wurzeln, das Quadrat einer zweiteiligen hinlänglich; wenn man nur stets eingedenk ist, sich unter a alle bereits gefundene WurzelTeile zu denken; zuerst nur den ersten, dan den ersten und zweiten; dan den ersten, zweiten und dritten, u. s. w. (§. 201).

§. 209.

L. Zum Beschlusse wollen wir noch aus 636 die QuadratWurzel ziehn.

S. $a^2 + 2ab + b^2$

$$\sqrt{6|36} = 25$$

$$\begin{array}{r} 4| \\ \hline 2\,36 \\ 45 \\ 2\,25 \\ \hline 11 \end{array}$$

Weiter geht es nicht. $\sqrt{636} = 25$, und 11 bleiben übrig.

L. Ganz recht! Wenn eine QuadratWurzel sich nicht ganz ausziehn lässt, so ist das ein Zeichen, daß die gegebene Grösse kein Quadrat ist. Wie man nun auch aus dem Reste die Wurzel durch Näherung, in Zehnteilen, Hundertteilen u. s. w. finden könne,

das

das werden wir erst in der Folge lernen, wenn wir die DecimalBrüche werden kennen gelernt haben. Bis dahin begnügen wir uns die QuadratWurzel aus 6 : 6 so zu bezeichnen:

$\sqrt{636} = 25$ ꝛc. oder $25 : :$, oder $25..$

S. Kan man nicht das Ueberbleibsel 11 der Wurzel anhenken, so:

$$\sqrt{636} = 25 + \sqrt{11}?$$

L. Das wollen wir untersuchen. — Aus 11 lässt sich wieder eine QuadratWurzel ziehn.

$$\sqrt{11} = 3 + \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{1}$$
$$\sqrt{1} = 1$$

$\sqrt{11} = 3 \quad + 1 \quad + 1 = 5$

Folglich $\sqrt{636} = 25 + \sqrt{11} = 25 + 5 = 30$
Folglich $30^2 = 636.$
Aber $30^2 = 30 \times 30$ (§. 153) $= 900$
Folglich $636 = 900$ (§. § 31):

welches ungereimt ist. — Nun wollen wir uns zum Ueberflusse auch durch BuchstabenRechnung vor der Unrichtigkeit dieses Verfahrens überzeugen. Aus $a^2 + b^2$ die Wurzel gezogen . . ?

S. Gibt zum ersten WurzelTeil a, und b^2 bleibt übrig.

L. Wolte man nun den Rest b^2 der Wurzel anhenken, so wie vorhin den Ueberschuß II; so erhielte man

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = a + \sqrt{b^2} = a+b$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = a+b$$

Aber $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)} = a+b$ (§. 199)

$$\sqrt{(a^2+b^2)} = \sqrt{(a^2+2ab+b^2)}$$ (§. §. 31)

welches ungereimt ist. — Wie deutet man also die QuadratWurzel von a^2+b^2 an?

S. Ich weis keinen andern Ausdrukk dafür als:

$$\sqrt{(a^2+b^2)}$$

L. Es gibt doch noch einen, oder gar zweie (§. 177).

S. $\sqrt{(a^2+b^2)} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2)^{1:2}$

§. 210.

L. Man hat auch Tafeln für die Quadrate, und ihre Wurzeln: da sie aber gewöhnlich nur die Quadrate von 1 bis 1000000 enthalten; so werden nur ein- zwei- und dreiziffrige Wurzeln genau darin gefunden. Wir wollen, z. B., die von

1296

und von 119025

darin aufsuchen.

S. $\sqrt{1296} = 36$

$\sqrt{119025} = 345.$

L.

L. Von Quadraten aber welche 1000000 übersteigen, findet man in den Tafeln nur die drei ersten Ziffern der Wurzel. Wir wollen sie von

18258529

auffuchen.

S. $\sqrt{18258529}$ steht nicht in den Tafeln; aber die nächst kleinere QuadratZahl ist 182329, und deren Wurzel ist 427.

L. Gut! Wir müssen nun den Unterschied beider Quadrate, oder den Unterschied des gegebenen, über das gefundene, suchen. Da aber an der gefundenen Wurzel noch eine Ziffer fehlt (§. 204); so ist bei Ausmittelung des Ueberschusses, hie. auf Rücksicht zu nehmen. — Wie ist das zu verstehn?

S. Ich muß dem gefundenen Quadrate ein Par Nullen anhenken (§ 203).

L. Man kan die Nullen auch weglassen, wenn man nur beobachtet, die Quadrate nicht von der Rechten gegen die Linke, sondern von der Linken gegen die Rechte, unter einander zu ordnen.

S. Gegebenes Quadrat = 18258529
Gefundenes Quadrat = 182329
= 25629

L. Recht! Aus diesem Ueberschusse wird nun, nach gewöhnlicher Art, die vierte WurzelZiffer gefunden.

S. $\sqrt{18|25|85|29} = 4273$

$$\begin{array}{r} 18|23|29| \\ \hline 2\,56|29. \\ 8548 \\ \hline 25629 \\ \hline 0 \end{array}$$

L. Gerade so wie §. 207, B, wo dieses Exempel gerechnet ist.

§. 211.

L. Nun lasst uns auch die QuadratWurzel von

5929225

aufsuchen.

S. Das nächst kleinere Quadrat ist 592900

$\sqrt{592900} = 770.$

L. Die drei ersten WurzelZiffern welche wir suchten, wären demnach 770. Ehemals haben wir sie anders gefunden.

$\sqrt{5929225} = 2435$ (§. 207)

Woher diese Verschiedenheit? — Wir wollen beide Quadrate, das gegebene, und das gefundene, unter einander setzen, und dan sie in Fächer abteilen (§. 205); vielleicht gibt uns das Aufschluß.

S. 5|92|92|25
59|29|00

Nun sehe ich woran es liegt. Die gefundene Zahl (592900) besteht aus parigen Ziffern, da die gegebene unparige hat. Das gibt eine andre Abteilung, und auch eine andre Wurzel.

L. Das ist wahr: wie werden wir dem aber abhelfen?

S. Ich muß ein fünfziffriges nächst kleineres Quadrat aufsuchen, dieses ist 5|90|49

$\sqrt{59049} = 243.$

L. Und nun abgezogen?

S. Von 5929225; QuadratWurzel 2435

abgezogen 59049

bleibt . 2|43|25 $= (2a+2b+2c+d)d$

4865 $= 2a+2b+2c+d$

24325 $= (2a+2b+2c+d)d$

0

L. So ist es recht: und nun wissen wir den Gebrauch der QuadratTafeln zu Ausziehung der Wurzeln vollständig. Wil man die Anfangs-Ziffern einer QuadratWurzel finden, deren Quadrat grösser ist als die in den Tafeln enthaltenen Quadrate; worauf hat man zu sehn?

S. Ob die Anzahl der Ziffern des Quadrats parig oder unparig sind; und in jedem Falle muß man ein ihm entsprechendes Quadrat aufsuchen.

Uebungs Exempel.

I. $\sqrt{11|94|39|36} = 345\ldots$

II. $\sqrt{5|30|84|16} = 230\ldots$

§. 212.

L. Man kan eben so geschwinde die Wurzel ausprobiren, als ausziehn. Es sei das Quadrat 2304 gegeben, um durch Schätzung und Versuchen die Wurzel zu finden. — Wie viel Ziffern wird sie haben?

S. Nicht mehr als zweie (§. 204).

L. Könte sie wol 50 seyn?

S. Nein: $50^2 = 2500$ ist zu groß.

L. Aber 40?

S. $40^2 = 1600$ ist zu klein.

L. Die Wurzel solt also zwischen 40 und 50. Welcher von beiden Zahlen aber wird sie am nächsten kommen?

S. Der Zahl 50; denn 23 ist näher an 50, als an 40.

L.

L. Wir wollen also 48 versuchen.

S. $48 \times 48 = 2304$.

L. Das war also getroffen. — Gesetzt aber man verlangte 5625 die Wurzel?

S. Die ist zwischen 70 und 80, ohngefähr mitten in. Wir wollen also 75 versuchen.

$75 \times 75 = 5625$.

L. Bei grössern Zahlen ist die Schätzung etwas schwerer, aber auch das WurzelAusziehn mühsamer. Wir wollen einmal aus dem Quadrate 266256 die Wurzel herausprobiren. Wie groß wird sie ohngefähr seyn?

S. Nicht viel über 500.

L. Ist die Zahl ein vollkommenes Quadrat, so ist auch aus der lezten Ziffer desselben zu ersehn, mit welchen Ziffern die Wurzel endigen kan. Hier ist die lezte Ziffer 6. Welches kan also die lezte WurzelZiffer seyn?

S. Entweder 4, oder 6; denn $4 \times 4 = 16$; und $6 \times 6 = 36$.

L. Die Wurzel von 266256 würde, nach ohngefährer Schätzung also seyn . . ?

S. 506, 514, 516, 524, 526.

L. Sie ist 516. — Dieser VerfahrungsArt haben die Alten vermuthlich sich bedient. Sie ist

nicht

nicht minder theoretisch richtig, dabei leichter, und zum praktischen Gebrauch bequemer als die gewöhnliche, und verdienet daher wol daß man einigen Fleiß darauf verwende. In der Folge werden wir auch geometrisch die Quadratwurzel ausziehn lernen (S. §. 261). Jezt folgen einige

Uebungsexempel.

$\sqrt{244036}$	$\sqrt{970225}$
$\sqrt{337561}$	$\sqrt{5929225}$
$\sqrt{552049}$	$\sqrt{64112049}$.

II. Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 213.

L. Wie findet man den Würfel einer zweiteiligen Wurzel $a+b$?

S. Durch dreimalige Multiplication mit sich selbst (§. 153)

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b) = (a^2+2ab+b^2) \times (a+b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

L. Der Würfel also einer zweiteiligen Wurzel $(a+b)$ besteht

1) aus

1) aus dem Würfel jedes Teils (a^3+b^3);

2) aus dem dreifachen Producte jedes Teils, in das Quadrat des andern $(3a^2b + 3ab^2)$.

Um uns diese Zusammensetzung in Zahlen vorzustellen, wollen wir, wie beim Quadrate (§. 196) $a=3$, $b=2$, folglich $a+b=5$ annehmen, und hieraus den Würfel zusammensetzen.

$$\begin{aligned}
\text{S. } (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&= (3+2)^3 = 3^3 + 3(3^2\times 2) + 3(3\times 2^2) + 2^3 \\
&= 27 + 3\times 18 + 3\times 12 + 8 \\
&= 27 + 54 + 36 + 8 \\
&= 125 = 5^3
\end{aligned}$$

L. Ist ein Glied verneinend, so ist

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

§. 214.

L. Den Würfel einer drei-, vier-, und mehrteiligen Wurzel, nach der gewöhnlichen Art zu finden, würde noch weit umständlicher seyn, als das Quadrat derselben auszurechnen. Wir wollen uns daher diese Mühe gar nicht nehmen, sondern suchen, ob wir es nicht auf kürzerm Wege haben können.

S.

S. Ich darf nur, wie beim Quadrate (§. 198) jede mehrteilige Wurzel als zweiteilig betrachten, nämlich alle vorhergehenden Teile für den ersten, a, den neu hinzugekommenen aber für den zweiten, b, annehmen. So ist

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$

$(a+b+c+d)^3 = (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$

L. Schon hinlänglich! — Nun die Abkürzungen weggeschafft!

S. $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$

$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$.

L. Woraus ist nun der Würfel einer mehrteiligen Wurzel zusammen gesetzt?

S. 1) aus dem Würfel jedes Teils ($a^3 + b^3 + c^3$ ꝛc.)

2) aus den dreifachen Producten der Quadrate der Summen aller vorhergehenden Teile, in jeden folgenden ($3a^2b + 3(a+b)^2c + 3(a+b+c)^2d$ ꝛc.

3) aus den dreifachen Producten der Summen aller vorhergehenden Teile in das Quadrat jedes folgenden
[$3ab^2 + 3(a+b)c^2 + 3(a+b+c)d^2$ ꝛc.]

§. 215.

L. Nun zur Ausziehung der CubicWurzel! Das erste Exempel mag wieder das bekannte $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ seyn.

S. Die Cubic-$\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} = a+b$

Wurzel von a^3 ist a. Der Würfel von $a = a^3$, abgezogen bleibt $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$. Um nun b zu finden, müste ich mit $3a^2 + 3ab + b^2$ dividiren. Da aber b noch unbekant augenommen wird, so dividire ich vorläufig nur mit $3a^2$ in $3a^2b$; gibt b. Nun ergänze ich den Divisor, indem ich $3ab + b^2$ hinzufüge. Der ganze Divisor, durch den Quotienten b multiplicirt, gibt $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dieses Product abgezogen vom Dividendus, geht gerade auf.

a^3	a^3
	$+3a^2b+3ab^2+b^3$ (Divid.)
	$(+3a^2+3ab+b^2)$ (Divis.)
	$+3a^2b+3ab^2+b^3$

L.

L. Gut! Dieses Exempel kan uns in der Folge zum Muster dienen.

Uebungs-Exempel.

I. $\sqrt[3]{(a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3)}$

II. $\sqrt[3]{(a^3 + 12a^2 + 48a + 64)}$

III. $\sqrt[3]{8a^3 - 36a^2c + 54ac^2 - 27c^3)}$

Ausrechnung.

S. I. $\sqrt[3]{(a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3)} = a - 3b$

a^3

$-9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

$(+3a^2 - 9ab + 9b^2)$

$-9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

0

II. $\sqrt[3]{(a^3 + 12a^2 + 48a + 64)} = a + 4$

a^3

$+12a^2 + 48a + 64$

$(+3a^2 + 12a + 16)$

$+12a^2 + 48a + 64$

0

III. $\sqrt[3]{(8a^3-36a^2c+54ac^2-27c^3)} = 2a-3c$

$8a^3$

$-36a^2c+54ac^2-27c^3$

$(+12a^2-18ac+9c^2)$

$-36a^2c+54ac^2-27c^3$

0

§. 216.

Anm. Auch die Ausziehung mehrteiliger Cubic-Wurzeln hat keine Schwirigkeit, wenn man nur, wie beim Quadrate (§. 201) sich alle Wurzeln zweiteilig vorstellt; das heisst, alle bereits gefundenen Teile für den ersten, und den noch zu findenden für den zweiten Teil annimt, und dabei nicht vergisst, $(a+b)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$ vor sich zu schreiben, um aus der Betrachtung dieser Formel sich die Regeln zum Ausziehn der Cubic-Wurzel zu abstrahiren. Solte dis noch nicht hinreichen die Schwirigkeiten zu heben, so kan man das ganze ausgerechnete Exempel (§. 214) vor sich nehmen.

§. Die beiden erſten Wurzel-Glieder $(a+b)$ werden gefunden wie vorhin (§. 214). Hierauf bleibt $-3a^2c-6abc+3ac^2-3b^2c+3bc^2-c^3$. Nehme ich nun $a+b$ für den erſter Teil an, der ſchon gefunden iſt; u. nenne den 3ten, noch unbekannten Teil $+y$; ſo ſtekkt in dem Ueberreſte (§. 213) erſtens $3(a+b)^2 y$, zweitens $3(a+b)y^2$ drittens y^3. Um alſo y zu finden, dividire ich durch $3(a+b)^2 = 3a^2+6ab+3b^2$; gibt zum Quotienten $-c$. Nun läſſt ſich der Diviſor ergänzen, der eigentlich $3a^2+6ab+3b^2-3ac-3bc+c^2$ iſt. Dieſer vollſtändige Diviſor, durch den Quotienten $-c$ multipl. gibt $-3a^2c-6abc-3b^2c+3ac^2+3bc^2-c^3$. Dieſes Product abgezogen von dem Dividendus, bleibt 0.

$$\sqrt[3]{(a^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-6abc+3ac^2+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)} = a+b-c$$

$+3a^2b-3a^2c+3ab^2-6abc+3ac^2+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3$			$a+b-c$
$(+3a^2$			$+3ab$
$+3a^2b$			$+3ab^2$
			$+b^3$
	$-3a^2c$	$-6abc+3ac^2$	$-3b^2c+3bc^2-c^3$
	$(+3a^2$	$+6ab-3ac$	$+3b^2-3bc+c^2)$
	$-3a^2c$	$-6abc+3ac^2$	$-3b^2c+3bc^2-c^3$

Uebungs-Exempel.

I. $\sqrt[3]{(8a^6-12a^4b+36a^4c+6a^2b^2-36a^2bc+54a^2c^2-b^3+9b^2c-27bc^2+27c^3)}$

II. $\sqrt[4]{(a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1)}$.

Ausrechnung.

I. $\sqrt[3]{(8a^6 - 12a^4b + 36a^4c + 6a^2b^2 - 36a^2bc + 54a^2c^2 - b^3 + 9b^2c - 27bc^2 + 27c^3)} = 2a^2 - b + 3c$

$8a^6$

$-12a^4b + 36a^4c + 6a^2b^2 - 36a^2bc + 54a^2c^2 - b^3$

$(+12a^4 \quad -6a^2b \quad +b^2)$

$-12a^4b \quad +6a^2b^2 \quad -b^3$

$+36a^4c \quad -36a^2bc + 54a^2c^2 \quad +9b^2c - 27bc^2 + 27c^3$

$(+12a^4 \quad -12a^2b + 18a^2c \quad +3b^2 - 9bc + 9c^2)$

$+36a^4c \quad -36a^2bc + 54a^2c^2 \quad +9b^2c - 27bc^2 + 27c^3$

0

II. $\sqrt[3]{(a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1)} = a^2 - 2a + 1$

a^6

$-6a^5 + 15a^4 - 20a^3$

$(+3a^4 - 6a^3 + 4a^2)$

$-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$

$+3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$

$(+3a^4 - 12a^3 + 12a^2$

$+3a^2 - 6a + 1)$

$+3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$

0

§. 217.

L. Nun wollen wir aus einer Zahl

$$8000 + 3600 + 540 + 27$$

die CubicWurzel ziehn.

$$\S\ (a+b)^3 = a+(3a^2+3ab+b^2)b\ (\S.\ 215)$$

$$\sqrt[3]{\left(\begin{matrix}8000+3600+540+27\\8000\end{matrix}\right)} = 20+3 = a+b$$
$$= a^3$$

$$+3600+540+27 = 3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(+1200+180+\ 9 = (3a^2+3ab+b^2)$$
$$+3600+540+27 = (3a^2+3ab+b^2)b$$

0

L. Nun noch aus $27000 + 16200 + 3240 + 216$ die CubicWurzel!

$$\S\ \sqrt[3]{\left(\begin{matrix}27000+16200+3240+216\\27000\end{matrix}\right)} = 30+6$$

$$+16200+3240+216$$
$$(+12700+\ 540+\ 36)$$
$$+16200+3240+216$$

0

L. Das ging gut: hätte ich aber aus 12167, und aus 46656 die Wurzeln verlangt, würde es schwerlich gegangen seyn, ungeachtet es dieselben sind. Die Schwirigkeit ist hier, wie beim Quadrate (§. 202), die Teile, aus welchen der Würfel zusam-

zusammengesetzt ist (§. 212), auseinander zu finden; oder die Stellen anzugeben, wo die geltenden Ziffern jedes Teils anzutreffen sind.

§. 218.

L. Zuerst frage ich: Wie viel Ziffern hat der Würfel einer einziffrigen Wurzel?

S. $1^3 = 1$, $2^3 = 8$; aber $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ und $5^3 = 125$, $9^3 = 729$. Die Würfel von 1 und 2 sind einziffrig; die von 3 und 4 zweiziffrig; und alle übrigen, von 5 bis 9 sind dreiziffrig.

L. Also weniger als eine Ziffer, und mehr als drei Ziffern, kan der Würfel einer einziffrigen Wurzel nicht haben. — Wenn aber an der einziffrigen Wurzel Nullen hangen, wie z. B. an 10, 100, 1000 ꝛc. 90, 900 u. s. w. wie viel Nullen bekömt dan der Würfel?

S. Drei Mal so viel als die Wurzel hat, die geltenden Ziffern ungerechnet, deren auch höchstens dreie seyn können.

$10^3 = 1000$

$100^3 = 1000000$

$1000^3 = 1000000000$

$30^3 = 27000$

$90^3 = 729000$

$900^3 = 729000000$ u. s. w.

L.

L. Wenn man nun den Würfel einer Zahl, die nur eine geltende Ziffer, und hinter derselben Nullen hat, in Fächer von Dreien abteilt,

$10^3 = 1|000$
$100^3 = 1|000|000$
$30^3 = 27|000$
$90^3 = 729|000$
$900^3 = 729|000|000$

so erhält man solcher Fächer = ?

S. So viel als die Wurzel Ziffern hat.

L. Wie aber, wenn man, anstatt der Nullen, geltende Ziffern setzte, würde das keine Aenderung machen? Würde es nicht etwan mehr Abteilungen geben, als die Wurzel Ziffern hat? Z. B. $900^3 = 729|000|000$ hat drei Abteilungen oder Fächer: könte 999^3 nicht deren mehr haben?

S. Wir wollen einmal annehmen 999^3 hätte zehn Ziffern. Die kleinste Zahl aber, die sich durch zehn Ziffern ausdrücken lässt, ist $1000|000|000 = 1000^3$. Solte nun 999^3 zehn Ziffern enthalten, so müste er entweder eben so groß seyn als 1000^3, oder grösser. Beides aber wäre ungereimt, weil $r^3 < (r + n)^3$.

L. Das ist richtig. Es ist also ausgemacht: Wenn man eine WürfelZahl in Abteilungen von dreien zerschneidet, so erhält man deren so viele = =

S.

S. Als die Wurzel Ziffern hat.

L. Wohl zu verstehn, jedoch, daß für das lezte Fach auch eine oder zwei Ziffern bleiben können. Und in jedem dieser Fächer stekkt der Würfel einer Ziffer der Wurzel: und jeder dieser Würfel hat seine niedrigste Ziffer = =?

S. In der niedrigsten Ziffer jedes Faches.

L. Und kan sich erstrekken = =

S. Bis in die dritte oder höchste des Faches.

L. Aber wo stekken die dreifachen Producte $3a^2b$ und $3ab^2$?

S. Die sind mit den Würfeln vermischt.

$$99^3 = 90^3 + 3(90^2 \times 9) + 3(90 \times 9^2) + 9^3$$

$$90^3 = 729000$$
$$9^3 = 729$$
$$3(90^2 \times 9) = 218700$$
$$3(90 \times 9^2) = 21870$$

$$90^3 + 9^3 + 3(90^2 + 9) + 3(90 \times 9^2) = 970|299 = 99^3$$

L. Man sieht hieraus zugleich, wo die dreifachen Producte anheben: $3a^2b$ nämlich in der höchsten, und $3ab^2$ in der mittelsten Ziffer des Faches.

§. 219.

L. Nun wollen wir die Exempel §. 216. noch einmal berechnen; aber nicht in ihrer dortigen Gestalt, sondern in dieser: $\sqrt[3]{12167}$, und $\sqrt[3]{46656}$.

S.

S. Zuerst die Abteilung in Fächer von Ziffern. Nun suche ich den Würfel des höchsten Faches 12; der ist 8; u. seine Wurzel 2 ist der erste Teil der Wurzel, (a). Der Würfel 8 von 12 abgezogen, bleibt 4. Hierzu das noch Vorräthige, gibt $4:167 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$.

$a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$

$\sqrt[3]{12}\,|\,167 = 20 + 3 = a + b$

$8\,| \quad = a^3$

$4\ 167 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$

$x\ 200 = 3a^2$

$x\ 80 = \quad + 3ab$

$9 = \quad\quad + b^2$

$x\ 389 = 3ab^2 + 3ab + b^2$

$4\ 167 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$

0

Um nun b zu bekommen, müste ich mit $3a^2 + 3ab + b^2$ dividiren: da aber b noch unbekant ist, so dividire ich vorläufig nur mit $3a^2 = 1200$. 41 : 12 gibt 3, den zweiten Teil der Wurzel, $= b$. Nun kan ich den Divisor ergänzen mit $3ab = 180$ und $b^2 = 9$; so daß der vollständige Divisor, $3a^2 + 3ab + b^2 = 1389$ ist. Dieser durch den Quotienten $b = 3$ multiplicirt, gibt $4167 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$: welches Product von dem Dividendus abgezogen, nichts läßt.

Auf eben die Art wird das folgende Exempel berechnet.

$\sqrt[3]{46|656} = 36$

27

19 656 $= (3a^2+3ab+b^2)b$

27

54

36

3276 $= 3a^2+3ab+b^2$

19656 $= (3a^2+3ab+b^2)b$

0

Uebungs-Exempel.

$\sqrt[3]{2197} = 13$

$\sqrt[3]{103823} = 47$

$\sqrt[3]{185193} = 57.$

§. 220.

L. Es wird gegeben die Cubic-Zahl 34965783: Wie viel Ziffern wird die Wurzel haben?

S. Die Wurzel von 34|965|783 ist dreiziffrig (§. 218).

L. Was ist zuerst zu thun, um die Wurzel auszuziehn?

S.

S. Wenn ich die Abteilungen gemacht habe, muß ich mir den Würfel einer dreiteiligen Wurzel hinschreiben:

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$

L. Recht! Die Deutlichkeit aber gewinnet, und das WurzelAusziehn geht besser von Statten, wenn man das Muster so setzt:

$(a+b+c)^3 = a^3$
$+(3a^2+3ab+b^2)b$
$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$
$+[3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d$
$+d^2]d$ u. s. w.

Nun fängt man an zu rechnen; und um sich burtiger zu recht zu finden, durchstreicht man das Formular, so wie man vorrükkt, oder bedekkt es bis dahin.

S. $\sqrt[3]{34|965|783} = 327 = a+b+c$

27 ::: ::: $= a^3$

7 965 ::: $= (3a^2+3ab+b^2)b$

2 7 ::: $= 3a^2$

184 ::: $= 3ab+b^2$

2884 ::: $= 3a^2+3ab+b^2$

5768 ::: $= (3a^2+3ab+b^2)b$

2197 783 $= [3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2)c]$

3072 :: $= 3(a+b)^2$

672 $= 3(a+b)c$

49 $= c^2$

313969 $= 3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2$

2197783 $= [3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$

0

Uebungs-Exempel.

$\sqrt[3]{1860867} = 123$

$\sqrt[3]{47437928} = 362$

$\sqrt[3]{14437662875} = 2435$

$\sqrt[3]{41278242816} = 3456$

$\sqrt[3]{106189986392} = 2198$

$\sqrt[3]{4274342410687552} = 75328.$

§. 221.

Es dient auch zur Bequemlichkeit, wenn man sich ein Täfelchen verfertigt, welches alle Quadrat- und Cubic-Zahlen von 1 bis 9 enthält.

Es sieht so aus:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 222.

L. Welches ist die Cubic-Wurzel von 8?

S. $\sqrt[3]{8} = 2$ (§. 220).

L. Und die von 9?

S. Die läſſt ſich nicht ausziehn.

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}.$$

L. Könte man ſie nicht trennen, und ſo ſchreiben:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}?$$

S. Nein, dan erhielte man

$$\sqrt[3]{8} = 2$$
$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Aber $\sqrt[3]{27} = 3$

Alſo kan $\sqrt[3]{9}$ nicht auch $= 3$ ſeyn.

L. Recht! Es gilt alſo vom Würfel eben das was §. 209 beim Quadrat erinnert iſt.

§. 223.

L. Es gibt auch Tafeln für die CubicZahlen von 1 bis 1000000000. Wir wollen darin aufſuchen die CubicWurzel von 571787.

S. $\sqrt[3]{571787} = 83.$

L. Und die von 846590536?

S. $\sqrt[3]{846590536} = 946.$

L.

L. Nun wollen wir auch von einem grössern Würfel als die Tafeln enthalten, die ersten Wurzel-Ziffern aufsuchen. Es wird verlangt die Cubic-Wurzel aus

14437662875.

Ich empfehle aber Vorsicht und Behutsamkeit.

S. Ich bin schon durch Aufsuchung der Quadrat-Wurzeln (§. 211) gewitzigt, und werde mich wol in Acht nehmen.

$\sqrt[3]{14|437|662|875} = 2435$

$14\ 348\ 907 = 243$

$88|755|875 = [3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2]d$ (§. 220)

$17|714|7 = 3(a+b+c)^2$

$3645 = 3(a+b+c)d$

$25 = d^2$

$17\ 751\ 175 = 3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2$

$88\ 755\ 875 = [3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2]d$

L. Beim Quadrat sah man, ob die Zifferzahl parig oder unparig war (§. 211): worauf hat man beim Würfel zu sehn?

S. Hier teilt man sie zu dreien in Fächer, und sieht zu ob alle Fächer voll werden, oder nicht; und wie viel in das lezte Fach zur Linken kommen, um einen gleichartigen Würfel in den Tafeln aufzusuchen.

L. Das war der Gebrauch der Tafeln zu Ausziehung der Cubic-Wurzeln. Auch beim Rechnen sind sie vorteilhaft, wie z. B. vorhin, da wir das Quadrat von 243 nötig hatten, welches in den Tafeln 59049 gefunden wird.

§. 224.

L. Auch das Ausprobiren findet hier Stat, wie beim Quadrate (§. 212). Es sei gegeben der Würfel

46656;

wie viel Ziffern wird seine Wurzel haben?

S. Zweie (§. 218).

L. Und welches wird die erste davon seyn?

S. 3; denn $27 = 3^3$ ist der nächstkleinere Würfel von 46.

L. Zwischen 30 und 40 also muß die Wurzel fallen. Wir wollen 34 versuchen.

S. $34^3 = 39304$.

L. Die ist so klein, wir hätten es ihr auch voraus ansehn können, daß sie die rechte nicht seyn konte. Und woran das?

S. In der lezten Ziffer die hier 4 ist, und 6 seyn muß.

L. Eben hieraus ergibt sich, daß es 36 seyn muß. Um uns zu überzeugen wollen wir es versuchen.

S. $36 \times 36 = 1296$
$1296 \times 36 = 46656 = 36^3$.

UebungsExempel.

$\sqrt[3]{405224}$ | $\sqrt[3]{14886936}$
$\sqrt[3]{1191016}$ | $\sqrt[3]{3970653 75}$

§. 225.

Wurzeln, höhere als des dritten Grades, auszuziehn wird nicht leicht verlangt. Solte es erfodert werden, so wird der, welcher mit Ausziehung der Quadrat: und CubicWurzel gut Bescheid weis, sich auch da zu helfen wissen, ohne andere Regeln zu bedürfen als deren der Analogie. Zur Probe wollen wir an einem Exempel in Buchstaben, und an einem in Zahlen, zeigen, wie die Wurzel des vierten Grades gefunden wird.

$\sqrt[3]{(a$

$$\sqrt[4]{(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)} = a+b$$

$$\begin{array}{l} a^4 \\ \hline +4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (+4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3) \\ +4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[4]{39|0625} & = & 25 = a+b \\ 16|\,„„„„ & = & a^4 \\ \hline 23\,0625 & = & „\,(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b \\ 32„„„ & = & „\,4a^3 \\ 1\,20 & = & „\;„\;6a^2b \\ 200„ & = & „\;„\;„\;4ab^2 \\ 125 & = & „\;„\;„\;„\;b^3 \\ \hline 46125 & = & „\;4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3 \\ 230625 & = & „\,(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Uebungs-Exempel.

$$\sqrt[4]{3486784401} = 243.$$

§. 226.

1. Noch ein andres Mittel die Wurzeln des vierten, sechsten, achten, neunten rc. Grades auszuziehn, geben folgende Formeln an die Hand:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{a^4} = \sqrt{}\ \sqrt{a^4} \\ \sqrt[6]{a^6} = \sqrt{}\ \sqrt[3]{a^6} \\ \sqrt[8]{a^8} = \sqrt{}\ \sqrt[4]{a^8} \\ \sqrt[9]{a^9} = \sqrt[3]{}\ \sqrt[3]{a^9} \end{array}\right\} \text{(§. 180).}$$

Um nämlich die Wurzel des vierten Grades zu finden, darf man nur die QuadratWurzel zwei Mal ausziehn; und um die des sechsten Grades zu erhalten ; ;?

S. Muß man erst die CubicWurzel, und aus dieser die QuadratWurzel herausziehn.

Arithmetik.

Fünftes Buch.

Von zehnteiligen und sechzigteiligen Brüchen.

I. Zehnteilige Brüche.

§. 227.

L. Jede Ziffer hat einen zweifachen Wert: einen innern und eigenthümlichen, und einen zufälligen, den sie von ihrer Stelle erhält und mit derselben ändert. Nimt man, z. B., die Zahl 3333; so ist die 3 überall dreie; aber in der ersten Stelle zur Linken, 3 Mal 1000; in der zweiten, 3 Mal 100; in der dritten, 3 Mal 10 (§. 6); in der vierten...?

S. 3 Mal 1 = 3.

L. Wenn man nun noch eine 3 zur Rechten ansetzte,

3333, 3,

unter der Bedingung, daß alle vorigen ihren Wert unverändert behalten, die neuhinzugekommene aber dem angenommenen Gesetze folgen, das ist, zehn Mal weniger bedeuten solte, als die nächst vorhergehende: welchen Wert wird diese hinzugesetzte, durch einen Strich von den übrigen getrennte, erhalten?

S. Da die nächst vorhergehende 3 gilt; so kan die angehängte nicht mehr als den zehnten Teil von 3, das ist $\frac{3}{10}$, gelten.

L. Und eine zweite 3 angehängt, unter der vorigen Bedingung,

3333, 33

würde gelten = ?

S. Den zehnten Teil von $\frac{3}{10} = \frac{3}{10} : 10 = \frac{3}{10 \times 10} = \frac{3}{100}$.

L. Und eine dritte (3333,333) würde $\frac{3}{1000}$; eine vierte (3333,3333) $\frac{3}{10000}$ bedeuten, u. s. w. In der That also sind die Zahlen rechter Hand des Striches nichts anders als eigentliche Brüche, deren Nenner weggelassen sind. Und welches sind diese Nenner?

S. 1, 10, 100, 1000 u. s. w.

L. Also entweder 10 selbst, oder Potenzen von 10. Und daher heissen dergleichen Zahlen zehnteilige oder DecimalBrüche. Man könte sich auch ein Rechenbrett für DecimalZahlen verfertigen, welches so aussehn würde:

Hundert	Zehn.	Eins.	Zehn-Teile.	Hundert-Teile.	Tausend-Teile.	Zehntaus-Teile.

§. 228.

L. Wenn man also eine Zahl mit angehängten DecimalBrüchen, z. B. 12, 345 auf gewöhnliche Art schreiben solte, wie würde sie aussehn?

S. $12, 345 = 12 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 12 + \frac{345}{1000}$.

L. Und umgekehrt eine Zahl $24 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$ in DecimalZiffern ausgedrükkt? ?

S. $24 + \frac{1}{10} + \frac{3}{300} + \frac{5}{1000} = 24, 135$ (§. 227).

L. Es ergibt sich hieraus, daß die Zahl der Nullen des Nenners eines DecimalBruchs zugleich seine Stelle in der Ordnung der DecimalZiffern andeutet. Hat der Nenner eine Null, so ist sein Zähler die erste DecimalZiffer nächst den Einern; hat der Nenner zwei Nullen? ?

S. So ist der Zähler die zweite DecimalZiffer.

L. Eben so läßt auch, umgekehrt, aus der Stelle, welche eine DecimalZiffer einnimt, sich die Zahl der Nullen ihres Nenners bestimmen. Nimt sie die erste Stelle nach den Einern ein, so hat der Nenner eine Null; nimt sie die zweite Stelle ein, so hat der Nenner zwei Nullen; nimt der Zähler die dritte Stelle, zur Rechten des Striches, ein? ?

S. So hat der Zähler drei Nullen.

L. Kurz zusammengefasst: Die Zahl der Nullen des Nenners eines DecimalBruchs ist gleich = ?

S. Der Zahl der Stellen, um welche sein Zähler von den Einern entfernt ist.

§. 229.

L. Nun werden wir auch eine Zahl wie diese

9,807

auszusprechen wissen!

S. $9{,}807 = 9 + \frac{8}{10} + \frac{7}{1000} = 9 + \frac{807}{1000}$

L. Und 9,8007;

9,08

9,008.

S. $9{,}8007 = 9{,}\frac{8}{10} + \frac{7}{10000} + 9 + \frac{8007}{10000}$

$9{,}08 = 9 + \frac{8}{100}$

$9{,}008 = 9 + \frac{8}{1000}$

L. Ganz recht! Ledige Stellen werden hier, wie bei ganzen Zahlen, mit Nullen ausgefüllt. Auch sogar den Mangel ganzer Zahlen deutet man durch eine Null an. Hätte man, z. B, bloß $\frac{3}{10}$, und kein Ganzes, so würde man das durch DecimalZiffern so ausdrükken:

$\frac{3}{10} = 0{,}3$

Wie würde man nun $\frac{3}{100} + \frac{2}{10000}$ andeuten?

S. $\frac{3}{100} + \frac{2}{10000} = 0{,}0302.$

§. 230.

§. 230.

L. 1,3 = 1 + $\frac{3}{10}$: Was gilt aber 1,30?

S. 1,30 = 1 + $\frac{30}{100}$ = 1 + $\frac{3}{10}$.

L. Also durch Hinzufügung von Nullen, wird ein DecimalBruch nicht vergrössert?

S. Nein. Jede Ziffer hat durch den Strich, der die Ganzen von den Decimalteilen sondert, einmal ihren bestimten Wert, der weder durch Nullen, noch durch andere angehängte Ziffern mehr geändert werden kan.

L. Findet sich also zur Rechten einer DecimalZiffer eine, oder mehre Nullen . .

S. So kan man sie wegstreichen, es sei denn, daß sie in besonderer Hinsicht nötig wären.

§. 231.

L. Es gibt noch eine andre BezeichnungsArt für die DecimalZahlen, die auch nicht ungewöhnlich, und zuweilen bequemer ist. Man nehme z. B.

1234,567

und stelle sich jede Ziffer in Potenzen der 10 multiplicirt vor; so erhält man

1234,

$$1234{,}567 = \left.\begin{array}{l} 1\times 1000 = 1\times 10^{3} \\ +\ 2\times 100 = 2\times 10^{2} \end{array}\right\}(\S.154)$$
$$+\ 3\times 10 = 3\times 10^{1}\ (\S.155)$$
$$+\ 4\times 1 = 4\times 10^{0}\ (\S.163)$$
$$\left.\begin{array}{l} +\ 5:10^{1} = 5\times 10^{-1} \\ +\ 6:10^{2} = 6\times 10^{-2} \\ +\ 7:100 = 7\times 10^{-3} \end{array}\right\}(\S.165)$$

Dieses kurz wiederholt:

S. $1234{,}567 = 1\times 10^{3} + 2\times 10^{2} + 3\times 10^{1} + 4\times 0^{0} + 5\times 10^{-1} + 6\times 10^{-2} + 7\times 10^{-3}$.

L. Noch kürzer; alle 10, und alle Additions-Zeichen weggelassen, und nur die OrdnungsZiffern behalten.

S. $1234{,}567 = 1^{3}2^{2}3^{1}4^{0}5^{-1}6^{-2}7^{-3}$.

L. Noch kürzer, nur die lezte Ziffer allein mit dem Exponenten bezeichnet.

S. $1234{,}567 = 1234567^{-3}$.

L. Man muß sich aber hüten, einen solchen DecimalExponenten, mit dem PotenzExponenten (§. 159) zu verwechseln. Der Exponent der Potenz deutet nämlich an, wie oft eine Grösse durch sich selbst multiplicirt werden soll: der Decimal-Exponent dagegen, oder die OrdnungsZiffer-

S. Gibt zu erkennen, durch welche Potenz der 10 eine Ziffer zu multipliciren ist.

L. Wir wollen daher, um für beide auch einen äussern Unterschied zu haben, uns zu Bezeichnung der DecimalExponenten, römischer ZahlZeichen, bedienen.

$1^{III}2^{II}3^{I}4^{0},5^{-I}6^{-II}7^{-III} = 1234567^{-III}$

§. 232.

L. Wie würde nun eine Decimal Zahl $5,7^{-IV}$ nach der ersten Art (§. 228) ausgedrukkt werden?

S. $57^{-IV} = 0,0057.$

L. Und 507^{-V}?

S. $507^{-V} = 0,00507.$

L. Und 57^{III}?

S. $57^{III} = 57000.$

L. Aus diesen Beispielen erhellt, wie eine BezeichnungArt leicht in die andre verwandelt wird. Ist, z. B. die OrdnungsZiffer positiv, 7^{III} so zeigt das an . .

S. Daß so viel Nullen zur Rechten anzusetzen sind, als die OrdnungsZiffer Einheiten hat. $7^{III} = 7000.$

L. Und ist sie negativ, wie 7^{-III}?

S.

S. So bedeutet es, daß die DecimalZiffer um eben so viel Stellen rechter Hand von den Einern entfernt ist, als ihre OrdnungsZiffer Einheiten hat: $7^{-III} = 0{,}003$.

L. Und da die Zahl dieser Stelle, der Zahl der Nullen gleich ist, welche der Nenner haben müste; so zeigt die OrdnungsZiffer zugleich die Zahl der Nullen des Nenners an.

§. 233.

L. Ein zehnteiliger Bruch also ist, der zum Nenner eine 1 mit einer Null, oder mit mehren Nullen hat (§. 227). Wie wird nun ein gewöhnlicher Bruch

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ꝛc.

in einen zehnteiligen verwandelt?

S. I. $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ (§. 228, 229) $= 5^{I}$

II. $\frac{3}{4} = \frac{30:4}{40:4} = \frac{7+\frac{1}{2}}{10}$

Ich muß noch eine Null hinzufügen:

$\frac{3}{4} = \frac{300:4}{400:4} = \frac{75}{100} = 0{,}75 = 75^{II}$

III. $\frac{5}{8} = \frac{50:8}{80:8} = \frac{6+\frac{2}{8}}{10}$

$\frac{5}{8} = \frac{500:8}{800:8} = \frac{6:+\frac{4}{8}}{100}$

$\frac{5}{8} = \frac{5000:8}{8000:8} = \frac{625}{1000} = 0{,}625 = 625^{III}$

L.

L. Das ist richtig, aber man kan sich das Verfahren erleichtern wenn man das Exempel so setzt: $\frac{5}{8} = 0{,}50 : 8 = 0{,}625$ Fürs Erste hänge ich nur dem Zähler eine Null an, und dividire durch den Nenner. Bleibt mir etwas übrig; so hänge ich wieder eine Null an, und dividire; und das so fort, bis entweder alles aufgeht, oder ich nicht nötig finde die Division weiter fortzusetzen. Um den Nenner bekümmere ich mich nicht, weil der bei zehnteiligen Brüchen weggelassen wird, (§. 229). — So erhalte ich

```
48
--
20
16
--
40
40
--
```

$\frac{5}{8} = 0{,}625$

wie vorhin.

Uebungs-Exempel.

$\frac{3}{16} = 0{,}1875$
$\frac{1}{16} = 0{,}0625$
$\frac{1}{3} = 0{,}333333$ ꝛc.
$\frac{2}{3} = 0{,}666666 \ldots$
$\frac{5}{6} = 0{,}83333 \ldots$
$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142 \ldots$

Die vier lezten Exempel zeigen, daß es Brüche gibt, die sich nicht genau in zehnteiligen ausdrükken lassen: doch kan man durch fortgesetzte

Divi-

Division, lezte dem wahren Werte der ersten so nahe bringen als man wil. Brüche dieser Art heissen unendliche DecimalBrüche.

§. 234.

L. Das war Verwandlung gewöhnlicher Brüche in DecimalBrüche. Wie verwandelt man aber einen DecimalBruch 0,625, in einen gewöhnlichen?

S. Ich muß ihm seinen Nenner geben (§. 232) und ihn nun aufheben

$$0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{125}{200} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

L. Mit endlichen DecimalBrüchen hat das keine Schwirigkeit: aber nun einen unendlichen 0,3333?

S. $0{,}3333\ldots = \frac{3333\ldots}{10000\ldots} = \frac{1111\ldots}{3333\ldots} = \frac{1}{3}$

L. Hier fehlt der Beweis daß $\frac{1111\ldots}{3333\ldots}$ wirklich $= \frac{1}{3}$ sey.

S. Den kan ich dadurch führen, daß $\frac{1}{3}$ in einem DecimalBruch verwandelt, $0{,}3333\ldots = \frac{3333\ldots}{1000\ldots}$ gibt (§. 233).

L. Dieser Beweis mag hingehn weil er kurz und leicht ist. Einen umständlichern gibt Euler in seiner Algebra T. I. Cap. 12; (nach Eberts Ausgabe T. I. Cap. 12). —

Uebungs Exempel.

$$0{,}09090\ldots = \frac{9090..}{100000..} = \frac{1010..}{11111..} = \frac{1}{11}$$

$$0{,}6363\ldots = \frac{6363..}{10000..} = \frac{2121..}{3333..} = \frac{7}{11}$$

§. 235.

Einer besondern Anweisung zu den vier Rechnungs Arten in Decimal Brüchen bedarf es kaum, wenn man bedenkt, daß der ganze Unterschied zwischen der gewöhnlichen und der Decimal Rechnung darin besteht, daß man bei lezter mit Brüchen zu tun hat, daran die Nenner fehlen; die man nur herzustellen braucht, um alles auf den gewöhnlichen Leisten zu bringen. Wenn daher hier ein kurzer Unterricht in der Decimal Rechnung folgt, so ist es zur Uebung, und um einige Vorteile zu lehren, die der, welcher viel rechnet, sich selbst erfindet, und der, welcher wenig rechnet, entbehren kan.

§. 236.

L. Bei Addition und Subtraction der Decimal-Zahlen ist keine Schwirigkeit, es müste denn die seyn, die Ziffern gehörig zu ordnen.

Es werden zu addiren gegeben

0,53 + 8,6

und zu subtrahiren:

13,28 — 5,3725.

S. I. 0,53 II. 13,2800 (§. 230)

8,6. 5,3725

Summe = 9,13 Rest = 7,9075

(Solte der Lehrling, aus Unbesonnenheit, hier fehlen, und die Exempel so schreiben:

0,53 und 706,425

8,6 63,28

so ist es leicht ihn zum Erkentnisse seines Fehlers zu bringen; man darf ihn nur (nach §. 234) die Brüche mit ihren Nennern bezeichnen, und nun addiren heissen:

$0{,}53 + 8{,}6 = \frac{53}{100} + 8 + \frac{6}{10} = 8 + \frac{53}{100} + \frac{60}{100}$

$= 8 + \frac{113}{100} = 8 + 1 + \frac{13}{100} = 9{,}13$).

Uebungs Exempel.

A. Additions Exempel.

I. 36,047 + 0,9082 + 570,80054

= 607,75574.

B. Subtractions Exempel.

I. 8,075 — 0,3804 = 7,6946

II. 5,34 — 1,203456 = 4,136544.

L. Es ist übrigens schon an sich klar, daß es keine Aenderung in der Rechnung machen würde, wenn die Zahlen auch nach §. 231 geschrieben wären: $53^{II} + 86^{I}$ u. s. w.

§. 237.

L. Zwei DecimalBrüche, $\frac{3}{100}$ und $\frac{2}{10}$ durch einander multiplicirt, wie viel Nullen erhält der Nenner des Products?

S. So viel als beide Factoren zusammen haben.

$$\frac{3}{100} \times \frac{2}{10} = \frac{6}{1000}$$

L. Wären daher die Factoren so bezeichnet $3^{-I} \times 2^{-II}$ so würde das Product seyn = =

S. $3^{-II} \times 2^{-I} = 6^{-III}$. Die Ordnungs-Ziffern der Factoren werden addirt.

L. Wenn aber ein Factor eine ganze Decimal-Zahl wäre; z. B. $3^{-II} \times 2^{0}$? oder $3^{-II} \times 2^{+II}$?

S. I. $3^{-II} \times 2^{0} = \frac{3}{100} \times 2 = \frac{6}{100} = 6^{-II}$

II. $3^{-II} \times 2^{+II} = \frac{3}{100} \times 200 = \frac{600}{100} = 6 = 6^{-II+II} = 6^{0}$.

L. Wir können also als Multiplicationsregel für die DecimalZahlen annehmen: Man multiplicirt die Factoren durch einander wie bei gewöhnlichen

lichen Zahlen; und das Product erhält zur Ordnungsziffer . . ?

S. Die Summe der Ordnungsziffern der Factoren.

Uebungsexempel.

I. $34^{-II} \times 6^{-II} = 204^{-IV} = 0{,}0204$

II. $234^{-II} \times 6^{-III} = 1404^{-V} = 0{,}01404$

III. $403^{-II} \times 26^{-IV} = 10478^{-VI} = 0{,}010478$

IV. $625^{-III} \times 16^{-I} = 10000^{-IV} = 1$

V. $403^{-II} \times 16^{+IV} = 10478^{+II} = 1047800$ (§. 231)

VI. $625^{+III} \times 16^{+I} = 10000^{+IV} = 100000000$

VII. $3{,}1 \times 10 = 31^{-I} \times 10^{0} = 310^{-I} = 31{,}0 = 31$ (§. 230)

VIII. $3{,}14 \times 10 = 31{,}4$

IX. $3{,}1415 \times 100 = 314{,}15$

X. $3{,}1415 \times 1000 = 3141{,}5$

XI. $3{,}1415 \times 10000 = 31415$

XII. $3{,}1415 \times 100000 = 314150$.

§. 238.

L. Da die Division entgegengesetzte Multiplication ist (§. 42), so ergeben sich daraus schon die Regeln für die Division der DecimalZahlen. — Welches sind sie?

S.

S. Man dividirt wie gewöhnlich, und gibt dem Quotienten zur OrdnungsZiffer den Ueberschuß der OrdnungsZiffer des Dividendus über die des Divisors.

L. Ganz recht.

UebungsExempel.

I. $8^{-II} : 4^{-II} = 2^{0}$

II. $48^{-I} \cdot 6^{-I} = 8^{0}$

III. $48^{-II} : 3^{-I} = 16^{-I} = 1,6$

IV. $8^{-I} : 4^{-II} = 2^{I} = 20$

V. $8^{I} : 4^{-II} = 2^{III} = 2000$

VI. $5,196 : 1,2 = 5196^{-III} : 12^{-I} = 4,33$

VII. $34^{-IV} : 25^{-III} = 3400^{-VI} : 25^{-III} = 0,136$

Berechnung der beiden lezten Exempel:

VI. $5196^{-III} : 12^{-I} = 433^{-II}$

48 :

39 :

36 :

36

36

0

VII. $34^{-IV} : 25^{-III} = 136^{-II}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 90^{-V} \\ 75 \\ \hline 150^{-VI} \\ 150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aus dem Exempel VII. erhellt, daß wenn die Division nicht aufgeht, man dem Reste eine o anhängt, und weiter dividirt, bis nichts übrig bleibt. Dabei aber muß man nicht vergessen, mit jeder Null, um welche der Dividendus wächst, auch seine OrdnungsZiffer um Eins zu vermehren. — Zuweilen ist man genöthigt, dem Dividendus gleich im Anfange Nullen anzuhängen, wie die beiden nächstfolgenden Exempel zeigen.

VIII. $16^{-I} : 125^{-II} = 160^{-II} : 125^{-II} = 128^{-II}$
$= 1,28$

IX. $2^{-III} : 25 = 200^{-V} : 25 = 8^{-V} = 0,00008$

X. $4,9946 : 10 = 49946^{-IV} : 1^{+I} = 49946^{-V}$
(§. 130)
$= \quad = \quad = 499460^{-V} : 10 = 49946^{-V}$
$= 0,49946$

XI. $4,9946 : 100 = 0,049946$

XII. $4,9946 : 50 = 49946^{-IV} : 5^{I} = 99892^{-VI}$
$= 0,099892$

Es gibt auch Exempel die kein Ende nehmen, wie:

XIII. $0,2 : 3 = 0,0666 \ldots$

XIV. $1 : 1,8257 = 0,547735 \ldots$

Ausrechnung.

XIII. $2^{-I} : 3 = 20^{-II} : 3 = 666^{-IV} \ldots$

18

20^{-III}

18

20^{-IV}

18

2 ꝛc.

XIV. $1 : 1,8257 = 100000^{\cdot V} : 18257^{\cdot IV} = 547^{\cdot III}$

91285

87150^{-VI}

73028

141220^{-VII}

127799

13421 ꝛc.

§. 239.

L. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§. 178) — Welches ist nun die QuadratWurzel aus $\frac{0}{100}$?

S. $\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$

L. Und die QuadratWurzel aus 9^{-II}?

S. $\sqrt{9^{-II}} = \sqrt{\frac{9}{100}}$ (§. 199) $= \frac{3}{10} = 3^{-I}$

L. Aber aus 16^{-IV}?

S. $\sqrt{16^{-IV}} = \sqrt{\frac{16}{10000}} = \frac{4}{100} = 4^{-II}$

L. Und die CubicWurzel aus 64^{-III}?

S. $\sqrt[3]{64^{-III}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10} = 4^{-I}$

L. Und die CubicWurzel aus 64^{-VI}?

S. $\sqrt[3]{64^{-VI}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{4}{100} = 4^{-II}$

L. Also $\sqrt{9^{-II}} = 3^{-1} = (\sqrt[2]{9})^{-II:2}$

$\sqrt{16^{-IV}} = 4^{-II} = (\sqrt[2]{16})^{-IV:2}$

$\sqrt[3]{64^{-III}} = 4^{-I} = (\sqrt[3]{64})^{-III:3}$

$\sqrt[3]{64^{-VI}} = 4^{-3} = (\sqrt[3]{64})^{-VI:3}$

Das wird hinlänglich seyn die Regeln für Ausziehung der Wurzeln aus DecimalZahlen angeben zu können. — Welches sind sie?

S. Man zieht die Wurzel bloß aus dem Zähler des DecimalBruches, und dividirt die Ordnungs-Ziffer oder die NullenZahl des Nenners (§. 238) durch den WurzelExponenten.

Uebungs Exempel.

$\sqrt{16^{-II}} = 4^{-I}$ | $\sqrt[3]{8^{-III}} = 2^{-}$

$\sqrt{81^{-IV}} = 9^{-II}$ | $\sqrt[3]{216^{-III}} = 6^{-I}$

$\sqrt{225^{-VI}} = 15^{-III}$ | $\sqrt[3]{512^{-III}} = 8^{-I}$

$\sqrt{729^{-VI}} = 27^{-III}$ | $\sqrt[3]{729^{-VI}} = 9^{-II}$

$\sqrt{24964^{-VI}} = 158^{-III}$ | $\sqrt[3]{3375^{-IX}} = 15^{-III}$

$\sqrt{255^{-VI}} = 16^{-IV}$ | $\sqrt[3]{970299^{-III}} = 99^{-I}$

§. 240.

L. Also $\sqrt{9^{-II}} = 3^{-I}$

$\sqrt{9^{-IV}} = 3^{-II}$

u. s. w.

Was wird nun $\sqrt{9^{-I}}$ geben?

S. Die Ordnungs $\sqrt{90^{-II}} = 9^{-I}\,4^{-II}\,8^{-III}$,, Ziffer — 1 lässt sich nicht halben. Da werde ich also müssen eine 0 an die 9 hängen, um eine gerade OrdnungsZiffer zu erhalten, die sich durch 2 geradeauf dividiren lässt (§. 230), $\sqrt{90^{-II}} = 9^{-I}$ und bleibt 9 übrig. Hier kan ich an das Ueberbleibsel 9 wieder ein par Nullen anhängen, so habe ich $\sqrt{9000^{-IV}} = 9^{-I}\,4^{-II}$,

81

900^{-IV}
184
736

16400^{-VI}
1888
15104

1296

und

und bleibt 164 zurükk. Hänge ich an diese 164 wieder ein par Nullen; so habe ich $\sqrt{900000}^{-VI}$ $= 948^{-III}$, und einen Ueberrest von 1296.

L. Dis kan man fortsetzen und sich der wahren Wurzel so sehr man wil, nähern. — Wie aber, wenn aus 3° die QuadratWurzel solte gezogen werden?

S. So ziehe ich sie $\sqrt{3} = 1^{\circ}7^{\cdot I}3^{\cdot II}2^{\cdot III}0^{\cdot IV}5^{\cdot V}$ .. erst aus 3°, und erhalte $\sqrt{3^{\circ}} = 1^{\circ}$, mit dem Reste 2. Hieran zwei Nullen gehängt, gibt $\sqrt{300}^{-II} = 1^{\circ}7^{-I}$ und den Rest 11. Hieran wieder zwei Nullen, gibt $\sqrt{30000}^{-V} = 1^{\circ}7^{-I}3^{-II}$ mit dem Reste 71. Und das geht so fort, bis ich $\sqrt{3000000000}^{-X} = 173205^{-V}$ erhalte, welches die Wurzel noch nicht ganz ist, weil wieder 27975 übrig bleiben.

1	
200^{-II}	
27	
189	
1100^{-IV}	
343	
1029	
7100^{-VI}	
3426	
6924	
17600^{-VIII}	
3464	
1760000^{-X}	
346405	
1732025	
27975	

L. Wir wollen hier einhalten. Man nennt dieses Verfahren: die QuadratWurzel durch Nähe-

Näherung ausziehn. — Was ist dabei zu beobachten?

S. Die OrdnungsZiffern müssen parig seyn.

L. Wenn sie's nun aber nicht sind? Wenn, z. B., aus $3{,}4^{-I}$ die QuadratWurzel zu ziehn wäre?

S. Dan muß man eine Null anhängen, so erhält man 340^{-II}.

L. So ist es recht. Und so muß man auch; so oft man eine Wurzel durch Näherung sucht, für jeden neuen WurzelTeil den man erlangt, dem Reste zwei Nullen anhängen. Zur Probe wollen wir das Exempel §. 209 fortsetzen, und aus 636 die Wurzel durch Näherung suchen.

S. $\sqrt{6}|36 = 25{,}219^{-III}\ldots$

```
   4|
  ---
  2 36
    45
  2 25
  ----
  11'00 -II
    502
  1004
  ----
   96'00 -IV
   5041
  -----
  4559'00 -VI
    50429
  453861
  ------
    2039
```

Uebungs-

Uebungs Exempel.

I. $\sqrt{12^0} = 3{,}4641 \ldots$

II. $\sqrt{465} = 21{,}563858 \ldots$

III. $\sqrt{10} = 3{,}16227766 \ldots$

IV. $\sqrt{24{,}964} = \sqrt{24{,}96|40|00} = 4{,}996 \ldots$

V. $\sqrt{0{,}3} = \sqrt{0{,}30} = 054772 \ldots$

VI $\sqrt{3{,}1622776} = \sqrt{3{,}16|22|77|60} =$
$1{,}7782794 \ldots$

§. 241.

L. Das Ausziehn der QuadratWurzel durch Näherung kan uns auf die Spur bringen, auch die Cubic-Wurzel durch Näherung zu finden. $\sqrt[3]{8^{-III}} = 2^{-I}$ (§. 234). Was wird nun $\sqrt[3]{8^{-II}}$ seyn?

S. Da muß ich erst $\sqrt[3]{80^{-III}} = 4^{-I}\,3^{-II}\,0^{-III}\,8^{-IV}$.

eine Null anhängen, um eine OrdnungsZiffer zu erhalten die sich durch 3 geradeauf dividiren läßt. $\sqrt[3]{8^{-II}} = \sqrt[3]{80^{-III}} = 4^{-I}$ und bleibt 16 übrig. An diese 16 drei Nullen gehängt gibt $\sqrt[3]{80000^{VI}} = 4^{-I}\,3^{-II}$ und bleibt 493 übrig. Daran wieder drei Nullen, gibt $\sqrt{80000000^{-IX}} = 4^{-I}\,3^{-II}\,0^{-III}$, und bleibt der vorige Rest. Noch ein Mal drei Nullen angehängt, gibt

64

16·000^{-VI}

48

369

5X69

15507

493000^{-IX}

5547

49·3·000000^{-XII}

554700

10320

64

55573264

4·44586112

48413888

$\sqrt{}\ 8000000000000^{-XII} = 4308^{-IV}$, u. 484I3888 Rest, an den mau wieder drei Nullen hängen müste, wenn man sich der Wurzel noch auf eine Decimal-Stelle nähern wolte.

L. Beim CubicWurzel Ausziehn also müssen die DecimalZiffern immer gedrittet seyn, anstat daß sie beim Quadrat parweis seyn musten.

UebungsExempel.

I. $\sqrt[3]{}\ 12168^{\circ} = 23{,}0006\ldots$

II. $\sqrt[3]{}\ 9702{,}99 = 9|702|990|000^{-VI} = 2132^{-II}\ldots$

III. $\sqrt[3]{}\ 97029{,}0 = 97|029|900|000^{-VI} = 4595^{-II}\ldots$

IV. $\sqrt[3]{}\ 3 = 1{,}4422\ldots$

V. $\sqrt[3]{}\ 10 = 2{,}1544\ldots$

VI. $\sqrt[3]{}\ 98765 = 9{,}9752\ldots$

§. 242.

L. Von den gewöhnlichen Quadrat- und Cubic-Wurzeln lassen sich drei Ziffern durch Hülfe der Tafeln finden (§. 210, 211, 223); solte dieses nicht auch bei zehnteiligen Brüchen Stat finden? Wie, z. B., werden die Ziffern von $\sqrt{}\ 3$ in den Tafeln gefunden?

S. $\sqrt{3} = \sqrt{3,00} = \sqrt{3,0000} =$ (§. 239)
Nächst kleinere Wurzel $= \sqrt{2,9929} = 1,73$
Rest = 71

L. Und von $\sqrt[3]{3}$ die ersten Ziffern?

S. $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{3,000} = \sqrt[3]{3,000000}$ (§. 240)
Nächst kleinere Wurzel $= \sqrt[3]{2,985984} = 1,44$
Rest = 14016

Uebungs Exempel.

(§. 239)

$\sqrt{636} = \sqrt{636,00}$
$\sqrt{465} = \sqrt{465,00}$
$\sqrt{24,964} = \sqrt{24,9640}$
$\sqrt{3,1622776}$

(§. 240)

$\sqrt[3]{8^{-II}} = 80^{-III}000000^{-IX}$
$\sqrt[3]{12168} = \sqrt[3]{12168,000}$
$\sqrt[3]{9702,99} = \sqrt[3]{9702,990}$
$\sqrt[3]{9702979} = \sqrt{97029,900}$

§. 243.

L. $\sqrt{3} = 1,73205...$ (§. 239). Die Rechnung aber ist hier noch nicht zu Ende; denn wenn man sie fortsetzte, findet man:

$\sqrt{3} = 1,732050807568...$

und es bleiben wieder 303903393337 6 übrig, und sie hat folglich ihr Ende noch nicht erreicht. Solte dis Ende aber wirklich nie zu erreichen seyn?

S. Ich solte doch meynen.

L.

L. Wenn man die gefundene Wurzel durch sich selbst multiplicirt:

1,73205... × 1,73205...

was muß sie zum Producte geben?

S. Ihr Quadrat, oder die Zahl aus der sie gezogen ist. Hier 3.

L. Wohl zu verstehn jedoch, mit allen der 3 angehängten Nullen: denn eigentlich ist

$\sqrt{3}$; 0000000000 = 1,73205... (§. 239)

Es müste also

$1{,}73205^2 = 3{,}0000000000$

seyn. Ist es das wirklich?

S. Nein; die lezte Ziffer, 5, durch sich selbst multiplicirt, gibt keine 0.

L. Wenn man aber weiter rechnete, würde man nicht endlich auf eine Ziffer kommen, welche 0 gäbe?

S. Nein, denn keiner einziffrigen Zahl Quadrat schliesst mit 0.

L. Es findet sich aber zuweilen 0 selbst am Ende.

S. Das ist noch kein Zeichen daß die Rechnung zu Ende wäre; sondern nur daß der Rest zu klein ist, um eine geltende Ziffer in die nächste Decimal-

cimalStelle zu geben. Wolte man bei 1,7320... abbrechen, so erhält man:

$$1{,}7320^2... = 2{,}99982400...$$

Da sind zwar ein Par Nullen am Ende, aber es werden vier Par erfodert. Auch dienen Nullen am Ende von DecimalBrüchen zu nichts; denn

$$1{,}7320 = 1{,}732 \quad (\S.\ 230).$$

L. Und so wird es immer seyn. Und was ist das Resultat davon?

S. Ist die Zahl aus der die QuadratWurzel soll gezogen werden, kein Quadrat; so kan man sich der wahren Wurzel zwar immer nähern, aber nie sie ganz erreichen.

L. Wie ist es aber mit dem Würfel? Läßt sich die CubicWurzel genau in DecimalTeilen finden?

S. Eben so wenig: denn auch keiner einziffrigen Zahl Würfel schliesst mit 0, (§. 220).

L. Also: weder Quadrat noch Cubic-Wurzel kan durch Näherung genau gefunden werden.

II. Sechzigteilige Brüche.

§. 244.

L. Ein zehnteiliger Bruch ist, der zu seinem Nenner 10 oder Potenzen von 10 hat (§. 227). Solten nicht auch Brüche möglich seyn, die zu ihren

ihren Nennern andre Zahlen hätten als 10, und deren Potenzen? Z. B. Brüche deren Nenner 20, 20^2, 20^3 ꝛc. 60, 60^2, 60^3 u. s. w. wären?

S. Warum nicht?

L. Aber wird sich auch ein gemeiner Bruch, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ꝛc. in einen der zum Nenner 60, oder Potenzen von 60 hätte, das ist, einen sechzigteiligen verwandeln lassen?

S. Ich darf nur auf ähnliche Art verfahren, als vorhin, da ich eben diese Brüche in zehnteilige verwandelte (§. 233).

I. $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 60}{2 \times 60} = \frac{30}{60}$

II. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 60}{4 \times 60} = \frac{3 \times 15}{60} = \frac{45}{60}$

III. a) $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 60}{8 \times 60} = \frac{300}{8 \times 60} = \frac{37\frac{4}{8}}{60} = \frac{37}{60} + \frac{\frac{1}{2}}{60}$

b) $\frac{\frac{1}{2}}{60} = \frac{60}{\frac{2}{60 \times 60}} = \frac{30}{60 \times 60} = \frac{30}{60^2}$

c) $\frac{5}{8} = \frac{37}{60} + \frac{\frac{1}{2}}{60} = \frac{37}{60} + \frac{30}{60^2}$

§. 245.

L. Man kan sich bei den sechzigteiligen oder SexagesimalBrüchen dieselbe Erleichterung verschaffen, als bei den zehnteiligen, wenn man, wie dort (§. 231) die Nenner weglässt, und dafür die Zähler mit OrdnungsZiffern bezeichnet. Z. B.

für $\frac{37}{60} + \frac{37}{60^2}$

kan man schreiben: $37^{-I}\ 30^{-II}$

für $40 + \frac{15}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{25}{60^3}$

aber: $40^{\circ}\ 15^{-I}\ 7^{-II}\ 25^{-III}$

oder auch: $40,\ 15\ \ 07\ \ 25^{-III}$

Die Ganzen dagegen haben zu ihrer Bezeichnung positive Exponenten, $^{\circ}$, ^{I}, ^{II}, ^{III}, ꝛc. wie die DecimalZahlen. Z. B:

$13^{+II}\ 04^{+I}\ 25^{\circ}\ 40^{-I}\ 12^{-II}\ 8^{-III}$

oder $13^{II}\ 04^{I}\ 25^{\circ}$ ꝛc.

L. Bei den DecimalZahlen bedeutete ein positiver Exponent, daß die Zahl, welche ihn führte, durch 10 oder eine Potenz von 10 zu multipliciren sei (§. 231): was wird er nun bei den SexagesimalZahlen andeuten?

S. Daß die Zahl durch eine Potenz von 60 zu multipliciren ist.

L. Recht! So ist denn:

$25^{\circ} = 25 \times 60^{\circ} = 25 \times 1$ (§. 138) $= 25$

$04^{+I} = 4 \times 60^{1} = 4 \times 60 = 240$

$13^{+II} = 13 \times 60^{2} = 13 \times (60 \times 60) = 46800$

$40^{-I} = 40 \times 60^{-1} = 40 \times \frac{1}{60}$ (§. 140) $= \frac{40}{60}$

$12^{-II} = 12 \times 60^{-2} = 12 \times \frac{1}{60 \times 60} = \frac{12}{3600}$

$8^{-III} = 8 \times 60^{-3} = 8 \times \frac{1}{60^3} = \frac{8}{60 \times 60 \times 60}$

Die

Die Bezeichnung der Sexagesimal-Ganzen mit positiven Ordnungs-Ziffern ist indessen nicht sehr gebräuchlich, und man schreibt

$$\text{statt } \left\{ \begin{matrix} 04^{+I} \\ 13^{+II} \end{matrix} \right\} \text{ lieber } \left\{ \begin{matrix} 240^{\circ} \\ 46800^{\circ} \end{matrix} \right.$$

Und da die positiven Ordnungs-Ziffern nun müssig sind, und keine Irrung zu befürchten ist; so bedient man sich ihrer zu Bezeichnung der Brüche, und schreibt:

$$25^{\circ}\ 40^{I}\ 12^{II}\ 8^{III}\ \text{ꝛc.}$$

Wir wollen aber bei der Regel bleiben.

L. Zur Uebung wollen wir einige gewöhnliche Brüche nach dieser leichten Art in sechzigteilige verwandeln und bezeichnen. Es mögen

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{8},\ \text{und}\ \tfrac{2}{7}$$

seyn.

$$\text{S. I. } \tfrac{3}{4} = \left(\tfrac{3 \times 60}{4}\right)^{-I} = \left(\tfrac{180}{4}\right)^{-I} = (180:4)^{-I}$$

Ausrechnung.

$$(180:4)^{-I} = 45^{-I}$$

16
20
20
0

$$\text{II. } \tfrac{5}{8} = \left(\tfrac{5 \times 60}{8}\right)^{-I} = (300:8)^{-I} = [(300 \times 60):8]^{-II}$$

Ausrechnung.

$(300:8)^{-I} = 37^{-I}\ 30^{-II}$

24
60
56
$(4\times60)^{-II} = 240^{-II}$
24
00

III. $\frac{2}{7} = (\frac{2\times60}{7})^{-I} = (\frac{120}{7})^{-I} = (\frac{120\times60}{7})^{-II}$ ꝛc.

Ausrechnung.

$(120:7)^{-I} = 17^{-I}\ 8^{-II}\ 34^{-III}\ 17^{-IV}$ ꝛc.

50
$1\times60 = 60^{-II}$
$4\times60 = 240^{-III}$
30
$2\times60 = 120^{-IV}$
50
1

L. Nun geht es wie vom Anfange. Es folgen $8^{-V}\ 34^{-VI}$; und dan wieder $17^{-VII}\ 8^{-VIII}\ 34^{-IX}$. Und so wechselt es unaufhörlich. Es erhellet hieraus, daß es auch unendliche SexagesimalBrüche gibt, so wie unendliche DecimalBrüche (§. 233).

§. 246.

§. 246.

L. Addition und Subtraction der Sexagesimal-Zahlen ergeben sich fast von selbst. Doch wollen wir, der Vollständigkeit wegen einige Exempel berechnen. — Was geben 44^{-I} und 36^{-I}?

S. $44^{-I} + 36^{-I} = 80^{-I} = 1^{\circ}20^{-I}$

L. Aber von $44^{-I}\ 36^{-II}$ abgezogen 55^{-II}, was bleibt da?

S. Von $44^{-I}\ 36^{-II} = 43^{-I}\ 96^{-II}$
abgezogen 55^{-II}
bleibt $43^{-I}\ 41^{-II}$

L. Recht! So oft beim Zusammenzählen 60 unter einer Bezeichnung erscheint, so rechnet man dafür eins zur nächst höhern Classe: und soll beim Subtrahiren von einer Classe mehr abgezogen werden als da ist = =?

S. So borgt man eins von der nächst höhern Classe, welches in der nächst niedrigern 60 gilt.

Additions-Exempel.

I. $36^{\circ},44^{-I}\ 8^{-II}\ 57^{-III}$
$9,36\ \ 54\ \ 28$
$45,80\ \ 62\ \ 85$
$46,21\ \ 03\ \ 25^{-III}$

II. $34^{I}\ 5^{\circ},18^{-I}\ 23^{-II}$
$18\ 12,54\ 14\ 12^{-III}$
$52\ 17,72\ 37\ 12$
$52\ 18,12\ 37\ 12$

Sub-

Subtractions Exempel.

I. $36,44'08\,57^{-III}$ — $9,36\,54\,28$ = $27,\ 7\ 14\ 29$

II. $34'05,18'23^{-II}$ — $18\ 12,54\ 14\quad 12^{-III}$ = $15\ 52\ 24\ 08\quad 48$

§. 247.

L. Was gibt 8^{-I} durch 12^{-II} multiplicirt?

S. $8^{-I} \times 12^{-II} = \frac{8}{60} \times \frac{12}{60^2} = \frac{96}{60^3} = 96^{-III}$
$= 1^{-II}\ 36^{-III}$.

L. Aber $4,9^{-I}$ durch 15^{-II}?

S. $4,\ 09^{-I}$
multiplicirt durch 15^{-II}
Product $= 60^{-II}\ 135^{-III} = 1^{-I}\ 2^{-II}\ 15^{-III}$

L. Und $4,8^{-I}\ 12^{-II}$ durch $9^{-I}\ 10^{-II}$

S. $4,\ 08^{-I}\quad 12^{-II}$
durch $9^{-I}\quad 10^{-II}$
$40^{-II}\ \ 80^{-III}\ \ 120^{-IV}$
$36^{-I}\ \ 72^{-II}\ 108^{-III}$
gibt $36^{-I}\ 112^{-II}\ 188^{-III}\ \ 120^{-IV}$
$= 37^{-I}\ \ 55^{-II}\ \ 10^{-III}$

L. Aus diesen Exempeln können wir uns nun die Regeln der Multiplication der SexagesimalZahlen ziehn.

S.

S. 1) Jedes Glied des einen Factors wird durch jedes des andern multiplicirt.

2) Zur OrdnungsZiffer erhält jedes Product die Summe der OrdnungsZiffern der Factoren aus denen es entstanden ist.

3) Endlich werden die einzelnen Producte, welche einerlei OrdnungsZiffer haben, addirt (§. 244).

UebungsExempel.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 17^{I} & 04^{0} & 00^{-I} & 25^{-II} \\
 & & & 20^{-I} & 12^{-II} \\
\hline
 & 204^{-I} & 48^{-II} & 00^{-III} & 300^{-IV} \\
 & 340^{0} & 80 & 00 & 500 \\
\hline
 & 340^{0} & 284^{-I} & 48^{-II} & 500^{-III} \quad 300^{-IV} \\
= & 5^{I} & 44^{0} & 44^{-I} & 56^{-II} \quad 25^{-III}
\end{array}
$$

§. 248.

L. Da bei der Multiplication die OrdnungsZiffern addirt wurden; so ergibt sich daraus schon, daß bei der Division die OrdnungsZiffer des Divisors von des Dividendus seiner muß abgezogen werden (§. 237): und wir können gleich zur Ausübung schreiten.

A. Kleinere DivisionsExempel.

I. $12^{-II} : 3^{-I} = 4^{-I}$

II. $12^{-II} : 3^{-II} = 4^{0}$

III. $12^{-II} : 3^{-III} = 4^{+I} = 4 \times 60 = 240$

IV. $4^{-I} : 8^{-I} = 240^{-II} : 8^{-I} = 30^{-I}$

V. $3^{-I} : 12^{-II} = 180^{-II} : 12^{-II} = 15^{0}$

VI. $14^{-II} : 3^{-II}$

VII. $16^{-II} : 3^{-I}$.

Berechnung der beiden lezten Exempel.

VI. $14^{-II} : 3^{-II} = 4^{0}\ 40^{-I}$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 2^{-II} = 120^{-III} \\ 120 \\ \hline 0 \end{array}$$

VII. $16^{-II} : 3^{-I} = 5^{-I}\ 20^{-II}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 1^{-II} = 60^{-III} \\ 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

B. Grössere DivisionsExempel.

I. $(32^{0}\ 45^{-I}) : 6^{0}$

II. $1^{-II}\ 50^{-III} : 9^{-I} = 110^{-III} : 9^{-I}$

III. $(37^{-I}\ 55^{-II}\ 10^{-III}) : (9^{-I}\ 10^{-II}) =$
$136510^{-III} : 550^{-II}$

IV. $(7^{0}32^{-I}30^{-II}38^{-III}46^{-IV}) : (2^{0}\,18^{-I}\,47^{-II})$
$= 3^{0}\,15^{-I}\,38^{-II}$.

Berechnung der Exempel B. I. II. III.

I. $(32^{\circ}\,45^{-I}) : 6^{\circ} = 5^{\circ}\,27^{-I}\,30^{-II}$

30

$2^{\circ}\,45^{-I} = 165^{-I}$

12

45

42

$3^{-I} = 180^{-II}$

180

0

II. $110^{-III} : 9^{-I} = 12^{-II}\,13^{-III}\,20^{-IV}$

108

$2^{-III} = 120^{-IV}$

117

$3^{-IV} = 180^{-V}$

180

0

III. $(37^{-I}\,55^{-II}\,10^{-III}) : (9^{-I}\,10^{-II}) = 4^{\circ}\,8^{-I}\,12^{-II}$

36 40

$1^{-I}\,15^{-II}\,10^{-III} = 75^{-II}\,10^{-III}$

73 20

$1^{-II}\,50^{-III} = 110^{-III}$

$108^{-III}\,120^{-IV} = 110$

0

Oder

Oder so:

$$136510^{-III} : 550^{-II} = 248^{-I}\,12^{-II} = 4^{\circ}8^{\prime\,-I}\,12^{\prime\prime\,-II}$$

110 :

265 :
220 :

451
440

$$11^{-III} = 660^{-IV}$$

55

110
110

0

C. DivisionsExempel ohne Ende.

$$24^{\circ} : 7^{\circ} = 3^{\circ}\,25^{-I}\,42^{-II}\,51^{-III}\ \text{ꝛc.}$$

21

$$3^{\circ} = 180^{-I}$$

14

40

35

$$5^{-I} = 300^{-II}$$

28

20

14

$$6^{-II} = 360^{-III}$$

35

10

7

$$3^{-III} = 180^{-IV}$$

u. s. w. wie vorhin.

Arith=

Arithmetik.

Sechstes Buch.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Von arithmetischen Verhältnissen, Proportionen, und Progressionen §. 249.

II. Von geometrischen Verhältnissen, Proportionen, und Progressionen §. 267.

Erster Abschnitt.

Von arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 249.

L. Hier sind zwei Zahlen

12 : 4.

Wie viel ist die erste 12, grösser als die zweite, 4?

S. 12 — 4 = 8.

L. Aber wie viel Mal ist die zweite, 4, in der ersten, 12, enthalten?

S. Drei Mal.

12 : 4 = 3

L. Die Vergleichung zweier Zahlen kan also auf zweierlei Art geschehn. Man kan nämlich fragen: Wie viel ist die eine grösser als die andere? Oder auch: Wie oft ist die eine in der andern enthalten? Die Antwort auf die erste Frage wird gefunden durch die Subtraction:

12 — 4 = 8;

Und die auf die zweite . . ?

S. Durch die Division:

12 : 4 = 3

L. Wenn man durch die Subtraction untersucht, um wie viel eine Zahl grösser ist als die andre; so betrachtet man beide in ihrem arithmetischen Verhältnisse: untersucht man aber durch die Division, wie viel mal eine Zahl in der andern enthalten ist; so betrachtet man sie in ihrem geometrischen Verhältnisse. Die Bezeichnung eines arithmetischen Verhältnisses ist a . b, oder a — b, wie Andre schreiben.

§. 250.

L. Bei jedem arithmetischen Verhältnisse sind drei Dinge zu merken, nämlich die beiden Glieder (12, 4) und ihr Unterschied (8), welcher letzte auch von Einigen der Namen des Verhältnisses genant wird. Wir wollen das erste, oder vorhergehende Glied a, das zweite, oder nachfolgende b, den Unterschied d nennen; so haben wir:

$$a - b = d$$

Addirt man nun b auf beiden Seiten des GleichheitsZeichens; so erhält man :: ?

S. $a - b = d$

$+ b \quad b$

$a \quad = b + d$ (S. §. 36).

L. Und nun auf beiden Seiten d subtrahirt?

S. Gibt $a - d = b$ (S. §. 37)).

L. Da haben wir drei Formeln, oder Gleichungen:

$$a - b = d$$
$$a = b + d$$
$$a - d = b$$

welche die Auflösung der Aufgabe enthalten: Aus zwei gegebenen Stükken eines arithmetischen Verhältnisses das dritte zu finden. Die erste Gleichung

$$a - b = d$$

sagt: Der Unterschied, d, wird gefunden, wenn man das zweite Glied, b, vom ersten, a, abzieht.

Die zweite:

$$a = b + d$$

heisst , , ?

S. Das erste Glied, a, wird gefunden, wenn man das zweite Glied, b, und den Unterschied, d, addirt.

L. Und die dritte

$$a - d = b$$

was will die sagen?

S. Vom ersten Gliede, a, den Unterschied, d, abgezogen, gibt das zweite Glied, b.

L. Es sei a = 12, b = 4;
so ist 1) a — b = d ::?
S. 12 — 4 = 8
L. 2) b + d = a ::?
S. 4 + 8 = 12
L. 3) a — d = b ::?
12 — 8 = 4

Oder es sei a = 4, b = 12;
so ist 1) a — b = d ::?
S. 4 — 12 = —8 (§. 135)
L. 2) b + d = a ,,?
S. 12 + —8 = 4 (§. 101)
L. 3) a — d = b ,,?
S. 4 — — 8 = 12 (§. 105).

L. Aus leztem Exempel erhellt zugleich, daß das vorderste Glied eines arithmetischen Verhältnisses kleiner seyn kan als das nachfolgende.

§. 251.

L. Es sei das vorhergehende Glied = a + d, das nachfolgende = a; welches wird der Unterschied seyn?

S.

S. $(a+d)-a=d$ (§. 250).

L. Wenn ich aber zu beiden Gliedern c addire:

$$(a+c+d)-(a+c);$$

welchen Unterschied gibt das?

S. Eben denselben, d; denn

$$(a+c+d)-(a+c)=d.$$

L. Aber c von beiden Gliedern subtrahirt:

$$(a+d-c)-(a-c)?$$

S. $(a+d-c)-(a-c)=d.$

L. Wenn man also zu beiden Gliedern eines arithmetischen Verhältnisses Gleiches addirt, oder von beiden Gleiches subtrahirt, was wird aus dem Unterschiede?

S. So bleibt der Unterschied derselbe.

§. 252.

L. Es ist also

$$\left.\begin{array}{lll} (a+d & - & a = d \\ \text{und } (a+c+d) & - & (a+c) = d \end{array}\right\} \text{(§. 251)}$$

$$(a+d) \,.\, a = (a+c+d) \,.\, (a+c) \text{ (G. §. 31)}$$

Desgleichen:

$$\left.\begin{array}{lll} (a+d) & - & a = d \\ \text{und } (a+d-c) & - & (a-c) = d \end{array}\right\} \text{(§. 251)}$$

$$(a+d) \,.\, a = (a+d-c) \,.\, (a-c) \text{ (G. §. 31)}$$

Dieſes in Worte gekleidet, heiſſt: Arithmetiſche Verhältniſſe, die einerlei Unterſchied haben, ſind einander gleich. Die Gleichheit zweier arithmetiſchen Verhältniſſe

$$(a+d) . a = (a+d+c) . (a+c)$$

oder $a . b = c . e$

heiſſt eine arithmetiſche Proportion, die man auch

$$a . b \therefore c . e$$

oder $a, b = c, e$

ſchreiben kann. — Aus wie viel Gliedern beſteht nun eine arithmetiſche Proportion?

S. Aus vieren; denn jedes der beiden Verhältniſſe, aus denen ſie zuſammen geſetzt iſt, enthält zwei Glieder.

L. Recht! Und von dieſen vier Gliedern nennt man zweie die äuſſern, und zweie die mittlern. Eine allgemeine Formel für arithmetiſche Proportionen, wo die vorhergehenden Glieder kleiner ſind als die nachfolgenden, iſt:

$$a . (a+d) = b . (b+d)$$

Wie würde nun eine, wo die VorderGlieder gröſſer ſind, ausſehn?

S. $a . (a-d) = b . (b-d)$.

L. Recht! Und beides zugleich anzudeuten, ſchreibt man ſo:

$$a . (a \pm d) = b . (b \pm d)$$

Das

Das doppelte Zeichen $\pm$ bedeutet, daß man im ersten Fall $+d$, und im zweiten, $-d$ nehmen müsse.

§. 253.

L. Es sei eine arithmetische Proportion;

$$a - b = c - e$$

Wenn man nun das zweite Glied, b, vom ersten Gliede, a; und das vierte, e, vom dritten, c, abzieht; welcher Unterschied ist grösser? $a - b$? oder $c - e$?

S. Die Gleichheit zweier arithmetischen Verhältnisse macht eine arithmetische Proportion (§. 252). Es muß also gleichviel übrig bleiben, wenn man das zweite Glied vom ersten, und das vierte vom dritten Gliede, abzieht.

§. 254.

L. Aber umgekehrt: das erste Glied vom zweiten, und das dritte vom vierten, gibt auch das gleiche Unterschiede?

S. Das weis ich nicht.

L. Wir wollen eine Proportion mit zusammen gesetzten Gliedern annehmen:

$$(a+d) \cdot a = (a+c+d) \cdot (a+c)$$

Nun vom zweiten Gliede a u. vom vierten a+c
abgezogen das erste a+d das dritte a+c+d

S. Bleibt —d und —d

L. Eine andre Proportion:

$$(a-d) \cdot a = (a+c-d) \cdot a+c$$

S. Vom zweiten Gl. a u. vom vierten a+c
abgezogen das erste a—d das dritte a+c—d

bleibt +d +d

L. In einer arithmetischen Proportion also das erste Glied vom zweiten, und das dritte vom vierten Gliede, abgezogen, gibt einerlei Unterschied. Und zwei Par Verhältnisse, mit gleichen Unterschieden, sind einander gleich (§. 251); und zwei Par gleiche arithmetische Verhältnisse machen eine arithmetische Proportion (§. 251). Wenn daher

$$a \cdot b = c \cdot e$$

so ist auch $b \cdot a = e \cdot c$

Das heisst . . ?

S. Die Glieder einer arithmetischen Proportion lassen sich versetzen, so daß die

vor

vorhergehenden die nachfolgenden, und diese die vorhergehenden werden.

§. 255.

L. Die beiden Verhältnisse

$$(a+d) — a$$

und $(b+d) — b$

machen die eine arithmetische Proportion?

S. Ja: denn sie haben einerlei Unterschied, d.

L. Also $(a+d) — a = (b+d) — b$ (§. 252). Wenn man nun die beiden äußern Glieder addirt, und dan auch die beiden mittlern, welche Summe wird grösser seyn? die der äussern Glieder? oder die der mittlern?

S. Sie sind beide gleich

$$a+d+b = a+b+d.$$

L. Wenn man aber die Glieder anders ordnet:

$$a — (a+d) = b — (b+d)$$ (§. 254)

und nun wie vorhin verfährt?

S. So erhält man $a+b+d = a+d+b$.

L. Also wenn $a . b = c . d$ so ist = =?

S. So ist $a+d = b+c$.

L. Das heisst in Worte gekleidet = =?

S. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äussern Glieder gleich der Summe der beiden mittlern.

L. Daraus folgt, daß wenn die mittlern Glieder einer Proportion unbekant sind, man doch ihre Summe finden kan; und wie?

S. Durch Addition der äussern Glieder.

L. Und eben so lassen sich die äussern Glieder finden . . ?

S. Durch Addition der mitlern.

§. 256.

L. Wenn in einer arithmetischen Proportion

8 . 6 = 6 . 4

die beiden mitlern Glieder gleich sind, so heisst sie eine stetige Proportion. Eine solche besteht eigentlich nur aus drei Zahlen: 8, 6, 4; welche so beschaffen sind, daß der Unterschied zwischen der ersten und zweiten, 8 und 6, so groß ist, als der zwischen der zweiten und dritten, 6 und 4. Man pflegt sie auch zu schreiben:

÷ 8 . 6 . 4

Einen allgemeinen Ausdrukk für ſtetige arithmetiſche Proportion gibt

$$a \,.\, b = b \,.\, c$$

oder $\div\, a \,.\, b \,.\, c$

Oder wil man das Wachſen uud Abnehmen der Glieder zugleich kenbar machen, ſo dienen folgende Formeln:

$$a \,.\, (a+d) = (a+d) \,.\, (a+2d),$$

und $a \,.\, (a-d) = (a-d) \,.\, (a-2d)$;

wofür man auch ſchreiben kan : :?

S. $\div\, a \,.\, (a+d) \,.\, (a+2d)$

und $\div\, a \,.\, (a-d) \,.\, (a-2d)$

L. Eine Proportion der erſten Art, wo die folgenden Glieder zunehmen, heiſſt ſteigend; eine der zweiten Art aber, wo die Glieder abnehmen, heiſſt fallend.

§. 257.

L. In der Proportion

$$a \,.\, b = b \,.\, c$$

iſt $a + c = 2b$ (§. 255)

und $(a+c) : 2 = b$

Wäre alſo b unbekant, ſo lieſſe es ſich, durch Hülfe von a und c dennoch herausbringen, das heiſſt: Von einer ſtetigen arithmetiſchen Propor-

tion

tion deren äussere Glieder bekant sind, läßt sich das mitlere finden. Und wie?

S. Wenn man die Summe der äussern durch 2 dividirt.

L. Es sei das erste Glied einer stetigen arithmetischen Proportion $= a$, das lezte $= a + 2d$; das mittelste noch unbekante mag vorläufig z heissen. Wie wird nun z gefunden?

S. $z = (2a + 2d) : 2 = a + d$

L. Die Proportion also wird seyn?

S. $a \cdot (a + d) = (a + d) \cdot (a + 2d)$

oder $\div\ a \cdot (a + d) \cdot (a + 2d)$

UebungsExempel.

$(a + d) \cdot y = y \cdot (a - d)$

$5 \cdot x = x \cdot 13$

$12 \cdot v = v \cdot 30.$

Ausrechnung.

$y = \frac{22}{2} = a$

$x = (5 + 13) : 2 = 9$

$v = 12 + 30) : 2 = 21.$

§. 258.

L. So wie man durch Hülfe der äussern Glieder, die mitlern finden kan, so lassen sich auch, durch Hülfe der mitlern, die äussern angeben. — Die drei ersten Glieder mögen a, b, c; das lezte mag z heissen, so haben wir

$$a \cdot b = c \cdot z.$$

Wie wird nun der Wert des unbekanten vierten Gliedes, z, gefunden?

S. $a + z = b + c$ (§. 255)

$z = b + c - a$ (S. §. 37).

L. Setzt man nun $b + c - a$ in die Stelle von z, so erhält man = ?

S. $a \cdot b = c \cdot (b + c - a)$.

L. Zu den gegebenen Grössen, (a, b, c) also, lässt sich die vierte arithmetische Proportional Grösse finden = ?

S. Wenn man die zweite und dritte addirt, und von der Summe die erste abzieht

$$(b + c) - a.$$

Uebungs Exempel.

$28 \cdot 22 = 13 \cdot y$

$17 \cdot 30 = 126 \cdot x$

$12 \cdot 16 = 16 \cdot v.$

Ausrechnung.

$$y = (22 + 13) - 28 = 7$$
$$x = (30 + 126) - 17 = 139$$
$$v = (16 + 16) - 12 = 20$$

§. 259.

L. Noch eine Reihe von Exempeln arithmetischer Proportionen.

$$8 . 6 = 5 . 3$$
$$8 . 5 = 5 . 2$$
$$8 . 4 = 5 . 1$$
$$8 . 3 = 5 . 0$$
$$8 . 2 = 5 . (-1)$$
$$8 . 1 = 5 . (-2)$$
$$8 . 0 = 5 . (-3)$$
$$8 . (-1) = 5 . (-4)$$
$$8 . (-2) = 5 . (-5)$$
$$8 . (-3) = 5 . (-6)$$

u. s. w.

Was kan man aus diesen Exempeln lernen?

S. Daß in arithmetischen Proportionen auch Glieder welche 0, und Glieder welche verneinend sind, Stat finden.

§. 260.

L. Wenn $a . b = c . e$;
so ist $a + e = b + c$ (§. 255)

Läßt

Läſſt ſich dieſer Satz auch umkehren? Das heiſſt:
Wenn $a + e = b + c$;
iſt dan auch notwendig

$$a \cdot b = c \cdot e?$$

Zuerſt von $a + e = b + c$, zu beiden Seiten ſubtrahirt.

S. $a + e = b + c$ (VoraussSetz.)

$$\left.\begin{array}{l} a = b + c - e \\ \text{L. Nun auch } b \text{ ſubtrahirt.} \\ \text{S. } a - b = c - e \end{array}\right\} \text{(S. §. 37).}$$

L. Durch richtiges Verfahren alſo iſt

$$a + e = b + c$$

in $a - b = c - e$

verwandelt: welches eine arithmetiſche Proportion iſt (§. 252). Es iſt alſo erwieſen:

Wenn $a + e = b + c$,
ſo iſt $a \cdot b = c \cdot e$

Das heiſſt: Wenn zwei Par Gröſſen ($a + e$ und $b + c$) gleiche Summen geben . .?

S. So laſſen ſie ſich in eine arithmetiſche Proportion ordnen.

L. Recht! Aber wie kommen ſie zu ſtehn?

S. So daß die Gröſſen des einen Pares ($a + e$) die äuſſern; und die des andern ($b + c$) die mitlern Glieder geben.

L. Aber welches Par gibt die äussern? Und welches die mitlern?

S. Da a . b ∴ c . e
sich so umändern läfft b . a ∴ e . c (§. 254)
daß die mitlern Glieder die äussern, und die äussern die mitlern Glieder werden; so ist es gleichgültig, welches Par die äussern, und welches die mitlern Glieder gibt.

§. 261.

L. Zwischen zwei benachbarten Gliedern einer stetigen arithmetischen Proportion

÷ a . (a + d) . (a + 2d)

herrscht einerlei Unterschied (§. 256). Wenn man nun ein viertes Glied hinzufügen wolte, wie würde das heissen?

S. a + 3d. Der Ueberschuß des zweiten Gliedes über das erste ist d. Dieser zum zweiten Gliede addirt, gibt das dritte Glied; und eben dieser Unterschied zum dritten hinzugetahn, gibt das vierte.

L. Und auf eben die Art läfft sich auch ein fünftes, sechstes ꝛc. Glied finden.

S. ÷ a . (a + d) . (a + 2d) . (a + 3d) . (a + 4d) . (a + 5d)
÷ a . (a — d) . (a — 2d) . (a — 3d) . (a — 4d) . (a — 5d).

Oder

L. Oder in Zahlen: ÷ 8.12 ꝛc.

S. ÷ 8.12.16.20.24.28.32.36 ꝛc.

÷ 30.28.26.24.22.20.18 ꝛc.

L. Eine solche Reihe nun, die immer mit gleichen Schritten fortgeht; wo zwischen zwei benachbarten Gliedern immer einerlei Unterschied herrscht; heisst eine arithmetische Reihe, oder Progression; und zwar eine steigende, wan die Glieder wachsen; und eine fallende, wan sie abnehmen. Auch die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung machen eine arithmetische Reihe; denn der Unterschied zwischen zwei benachbarten Gliedern ist immer derselbe, nämlich 1. Und zwar bilden sie in ihrer natürlichen Ordnung

÷ 1.2.3.4.5.6 ꝛc.

eine steigende; und in der umgekehrten

÷ 100.99.98.97 ꝛc.

eine fallende Reihe.

§. 262.

L. Wenn man unter eine arithmetische Reihe die Zahl der Glieder schreibt:

÷ a.(a+1d).(a+2d).(a+3d).(a+4d).(a+5d)

1 2 3 4 5 6

was bemerkt man da?

S. Daß die Zahl des Gliedes den darüber stehenden Coefficienten des Unterschiedes immer um 1 übertrift. Z. B. beim Gliede 2 ist der Coefficient 1; beim Gliede 3 ist er 2, u. s. w.

L. Diese Entdekkung bringt uns auf die Spur: Jedes verlangte Glied einer arithmetischen Reihe ausser der Ordnung anzugeben; wenn nämlich das erste Glied, und der Unterschied bekant sind. Man wolte z. B. das zehnte Glied obiger Reihe, deren erstes Glied a, und deren Unterschied d ist, wissen?

S. Es ist $a + 9d$.

L. Das wäre bei einer steigenden Reihe. Aber bei einer fallenden würde es seyn . . ?

S. $a - 9d$.

L. Aber von dieser Reihe

$\div 7 . (7+3) . (7+3+3) . (7+3+3)$ ꝛc

deren erstes Glied $= 7$, und der Unterschied $= 3$; welches wird da das 15te Glied seyn?

S. $7 + (14 \times 3) = 7 + 42 = 49$.

L. Es sei das erste Glied $= p$, der Unterschied $= d$, welche Reihe wird das geben?

S. Steigend $p . (p+d) . (p+2d) . (p+3d) . (p+4d)$ ꝛc.

Fallend $p . (p-d) . (p-2d) . (p-3d) . (p-4d)$ ꝛc.

L.

L. Wenn man nun das Glied der Zahl n angeben solte, welches vorläufig v heissen mag: welches würde das seyn?

S. $v = p \pm (n - 1)d$.

L. Also jedes Glied einer arithmetischen Reihe, auch ausser seiner Ordnung anzugeben, was muß man tuhn?

S. Den Unterschied durch die Zahl des verlangten Gliedes weniger 1 multipliciren, und zu diesem Producte das erste Glied addiren.

Uebungs Exempel.

I. Es sei $p = 4$,
$d = 3$,
$n = 100$;
so ist $v = p \pm (n - 1)d = 4 \pm (100 - 1)3$
$= 4 \pm (300 - 3) = 4 \pm 297 =$
$(4 + 297 = 301$; oder $4 - 297 = -293)$.

II. Es sei $p = 5$, $d = 2 + \frac{1}{2}$, $n = 64$;
so ist $v = 5 + (64 - 1)\frac{5}{2} = 5 + (63 \times \frac{5}{2}) = 5 + \frac{315}{2}$
$= 5 + 157 + \frac{1}{2} = 162 + \frac{1}{2}$.

§. 263.

L. Hier ist eine arithmetische Reihe von vier Gliedern:

$\div a \cdot (a \pm d) \cdot (a \pm 2d) \cdot (a \pm 3d)$.

Addirt man nun die beiden äussern, und die beiden mitlern Glieder; so erhält man : = ?

S. $a + a \pm 3d = 2a \pm 3d$

und $a + d + a \pm 2d = 2a \pm 3d$.

L. Also einerlei Summe. — Wie aber, wenn man die Reihe noch um ein Glied vermehrt:

$\div a . (a+d) . (a+2d) . (a+3d) . (a+4d)$,

so daß die GliederZahl = 5, und also ungerade ist?

S. Dan ist $a + (a+4d) = 2(a+2d)$.

L. Die Summe der äussern Glieder also dem mittelsten doppelt genommen gleich. Aber wird das immer so bleiben? Wird bei jeder Vermehrung der Glieder die Summe der äussern, der Summe der mitlern Glieder, oder dem Doppelten des mittelsten Gliedes, gleich seyn?

S. Ja: Denn so oft man hinten ein Glied ansetzt

$\div a . (a+d) . (a+2d) . (a+3d) . (a+4d) . (a+5d)$ &c.

erhält man ein d mehr für die Summe der äussern Glieder, aber auch eins mehr für die mitlern, indem die Mitte um eine Stufe höher rükkt.

L. Es gilt also von arithmetischen Reihen, was von arithmetischen Proportionen erwiesen ist (§. 255). In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der beiden äussern Glieder gleich

der

der Summe der beiden mitlern. Wenn nämlich die Zahl der Glieder gerade ist. Ist sie aber ungerade . . ?

S. So ist die Summe der äussern Glieder gleich dem doppelten mittelsten.

§. 264.

$\div a . (a+d) . (a+2d) . (a+3d) . (a+4d) . (a+5d) . (a+6d)$
I II III IV V VI VII

L. Hier ist eine arithmetische Reihe von sieben Gliedern. In derselben ist

$$I + VII = IV + IV = 2a + 6d \text{ (§. 260).}$$

Aber finden sich, ausser diesen zwei Paren, nicht noch andre Pare, welche eben die Summe geben?

S. Ja. II + VI und III + V.

L. Also $\left.\begin{array}{rcl} IV & + & IV \\ III & + & V \\ II & + & VI \\ I & + & VII \end{array}\right\} = 2a + 6d$

Und wenn man der vorigen Reihe noch ein Glied zusetzt, so wird dieses achte Glied heissen . . ?

S. VIII $= a + 7d$; und die Reihe wird nun:

$\div a . (a+d) . (a+2d) . (a+3d) . (a+4d) . (a+5d) . (a+6d) . (a+7d)$
I II III IV V VI VII VIII

L. Welche GliederPare geben hier gleiche Summen?

S. Zuerst I + VIII = IV + V (§. 263)
Dan III + VI = II + VII

L. Also $\left.\begin{matrix} IV + V \\ III + VI \\ II + VII \\ I + VIII \end{matrix}\right\} = 2a + 7d$

Wenn man dieses Exempel, und das vorige aufmerksam betrachtet, was bemerkt man da?

S. Daß die GliederPare, welche von der Mitte gleich weit abstehn, gleiche Summen geben.

L. Aber wird das, was wir hier an zwei Reihen bemerkt haben, auf alle sich erstrekken? Werden immer zwei von der Mitte gleich weit entfernte Glieder mit diesen mittelsten selbst gleiche Summen geben?

S. Ja: denn so wie die Glieder sich von der Mitte entfernen, gewinnen sie auf der einen Seite, was sie auf der andern verlieren. Der Coefficient wächst auf der einen gerade so viel, als er auf der andern abnimt.

L. Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe zweier, von der Mitte gleich weit ent-

entfernter Glieder gleich der Summe der beiden mittelsten, bei gerader GliederZahl; und dem doppelten mittelsten, bei ungerader Anzahl derselben.

L. Hätten wir, z. B. eine Reihe von neun Gliedern; welche GliederPare gäben dan gleiche Summen?

S. V + V
= IV + VI
= III + VII
= II + VIII
= I + IX
} = 2a + 8d

§. 265.

L. Wenn ich die Summe einer arithmetischen Reihe angeben soll, ist es da nötig, alle Glieder derselben zu wissen, um sie zu addiren?

S. Nein: Es ist hinlänglich zweie derselben, (entweder die beiden mittelsten, oder die beiden äussersten, oder zwei andere von der Mitte gleich entfernte,) zu kennen (§. 264).

L. Es sei das erste Glied = p, das lezte = v, die Zahl der Glieder = n, die Summe derselben = S: welches ist dan der Wert von S? Oder wie wird S gefunden?

E. $S = (p + v) \times \frac{n}{2} = \frac{n(p+v)}{2}$

L. Diese Formel in Worte gekleidet, heißt . . ?

S. Die Summe einer arithmetischen Reihe wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und lezten Gliedes durch die halbe Gliederzahl multiplicirt.

Uebungsexempel.

I. Es sei $p = a$, $v = a + 7d$, $n = 8$;
so ist $S = (2a + 7d) \times 4 = 8a + 28d$

II. Es sei $p = 2$, $v = 32$, $n = 11$;
so ist $S = \frac{34 \times 11}{2} = 187$.

§. 266.

Anwendung der Lehre von arithmetischen Reihen.

I. Die Zahl der Schläge zu finden, welche eine Uhr in 12 Stunden tuht.

Es ist solches die Reihe:

$\dot{-}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (§. 261).

Also $(\frac{p+v}{2})^n = \frac{(1+12) \times 12}{2} = 13 \times 6 = 78$.

II.

II. Die Summe der Schläge einer italiänischen, bis 24 schlagenden Uhr, zu finden.

Hier ist $\frac{(p+v)n}{2} = \frac{(1+24)\times 24}{2} = 25\times 12 = 300$.

III. Ein Brunnen 32 Fuß tief ist zu graben verdungen, der erste Fuß für 5 Groschen, der zweite für 8, der dritte für 11 u. s. w.; so daß der Lohn für jeden Fuß immer um 3 Groschen steigt: wie viel wird der ganze Brunnen kosten?

Hier ist 1) $v = 5 + (31\times 3)$ (§. 226) $= 98$

2) $S = 103\times 16$ (§. 129) $= 1648$ Gr.

3) 1648 Sgr. = 68 T. 16 Sgr.

IV. Ein Brunnen, 64 Fuß tief, ist verdungen, der erste Fuß zu 5 Gr., der zweite zu $7\frac{1}{2}$, der dritte zu 10 Gr. u. s. w.; wie viel wird die ganze Arbeit kosten?

1) $v = 5 + (63\times\frac{5}{2}) = 5 + \frac{315}{2} = \frac{325}{2}$

2) $S = (5+\frac{325}{2})\times 32 = 160 + 5200 = 5360$ Gr.

3) 5360 Sgr. = 223 T. 8 Sgr.

Zwei-

Zweiter Abschnitt.

Von geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 267.

L. Bei arithmetischen Verhältnissen fragte man: Um wie viel ist b gröſſer oder kleiner als a? Beim geometrischen aber wird gefragt: Wie oft ist b in a enthalten? (§. 249). Und die Antwort wird gefunden . . ?

S. Durch die Division.

L. Das ist die Ursache, warum man ein geometrisches Verhältniß wie einen Quotienten bezeichnet:

a : b

oder 12 : 4

Da man aber auf diese Art Verhältnisse und Quotienten nicht unterscheiden kan; so ist es besser erste

a . . b; 12 . . 4,

oder mit andern a . b 12 . 4

zu bezeichnen. Bei dem Verhältnisse 12 . . 4 ist die Frage: Wie oft steckt 4 in 12? Und die Antwort?

S. $\frac{12}{4} = 3$ Mal.

L. Aber könte man es nicht umkehren? Könte man nicht auch fragen: Wie oft steckt 12 in 4?

S.

S. Ja. $4 : 12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

L. Es erhellt hieraus, daß auch bei geometrischen Verhältnissen das vorhergehende Glied kleiner seyn kan als das nachfolgende (§. 250).

§. 268.

L. Auch sind beim geometrischen Verhältnisse wie beim arithmetischen (§. 250) drei Dinge zu bemerken, nämlich das vorhergehende Glied, a; das nachfolgende, b; und = = ?

S. Der Quotient $a : b = \frac{a}{b}$

L. Dieser wird auch der Exponent, der Nenner, oder der Namen des Verhältnisses genannt.

§. 269.

L. Haben zwei geometrische Verhältnisse

wie an . . a, und bn . . b

einerlei Namen, oder Exponenten, n, so ist

$$an \,..\, a = bn \,..\, b,$$

das heisst = = ?

S. So sind sie einander gleich.

L. Und auch umgekehrt: Wenn zwei geometrische Verhältnisse einander gleich sind, so haben sie einerlei Namen.

§. 270.

§. 270.

L. Die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse

a . . b = c . . d

heisst eine geometrische Proportion. Man spricht dieses aus: a verhält sich zu b, wie c zu d. Oder auch kürzer: a zu b, gleich c zu d. — Sind die mittelsten Glieder gleich:

a . . b = b . . c,

oder 12 . . 6 = 6 . . 3;

so heisst die Proportion stetig, oder zusammenhängend. Man kan sie dan auch so schreiben:

∴ a . . b . . c

und ∴ 12 . . 6 . . 3.

§. 271.

L. Ehemals bezeichnete man eine geometrische Proportion

a . b : : c . d

und eine arithmetische:

a . b ∴ c . d

wofür Leibnitz die jetzige BezeichnungsArt,

a : b = c : d

a — b = c — d

einführte, die aber von Auswärtigen nicht angenommen ist. Die Deutschen fühlen die Unbequemlichkeit derselben, ohne den Mut zu haben davon abzugehn.

§. 272.

§. 272.

L. Welches ist der Namen des Verhältnisses 20 . . 5?

S. $\frac{20}{5} = 4$.

L. Und des Verhältnisses 5 . . 20?

S. $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

L. Und des Verhältnisses 57 . . 27?

S. $\frac{57}{27} = 2 + \frac{3}{9}$.

L. Und des Verhältnisses $\sqrt{3}$ . . 40?

S. $= \frac{\sqrt{3}}{40} = \frac{1,73205}{40} = 0,433011$ (§. 248).

L. Die drei ersten Verhältnisse, welche rationale (§. 179) Exponenten oder Namen haben, heissen rational; ein Verhältniß aber, wie das Lezte, welches eine Irrational-Zahl zum Exponenten hat, heisst irrational. Man kan aber ein IrrationalVerhältniß durch Ausziehung der Wurzel einem RationalVerhältnisse so nahe bringen, als man wil. Wie würde, z. B. das Verhältniß $4 \,..\, \sqrt{3}$ sich ausdrukken lassen?

S. $4 \,..\, \sqrt{3} = 4 \,..\, 1,73205 :: = 400000 . 173205 ::$

§. 273.

L. Hier ist ein geometrisches Verhältniß

a : b;

Welches ist der Exponent, oder Name desselben?

S.

S. $\frac{a}{b}$ (§. 268).

L. Es sei $\frac{a}{b} = n$; welches ist dann?

S. Wenn $\frac{a}{b} = n$;

so ist $\frac{ab}{b} = bn$

oder $a = bn$

L. Und $\frac{a}{n}$?

S. $\frac{a = bn}{\frac{a}{n} = b}$

L. Da haben wir drei Formeln, welche die Auflösung dieser Aufgabe enthalten: Aus zwei gegebenen Stükken eines geometrischen Verhältnisses (§. 268) das dritte zu finden. — Wie wird der Namen, n, gefunden?

S. Durch Division des ersten Gliedes, durch das zweite.

L. Und das erste Glied a?

S. Durch Multiplication des zweiten Gliedes, b, mit dem Namen des Verhältnisses n.

L. Und endlich das zweite Glied b?

S. Durch Division des ersten Gliedes durch den Namen, n.

§. 274.

L. Wenn ich eines geometrischen Verhältnisses beide Glieder durch einerlei Grösse multiplicire:

a . . b

am . . bm;

wird dadurch wesentlich geändert? das heisst: bekömt es einen andern VerhältnißNamen?

S. Namen von a . . b $= \frac{a}{b}$

Namen von am . . bm $= \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

Folglich a . . b = am . . bm (§. 268).

L. Durch Multiplication also wird das Verhältniß nicht geändert. Wie aber, wenn man beide Glieder durch m dividirte:

$\frac{a}{m} \cdot\cdot \frac{b}{m}$?

S. Namen von $\frac{a}{m} \cdot\cdot \frac{b}{m} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{a}{b}$ (§ 114) = a : b (§ 84)

welches auch der Name des Verhältnisses a . . b ist.

L. Also $\frac{a}{m} \cdot\cdot \frac{b}{m}$ = a . . b = am . . bm.

Das heißt = , ?

S. Wenn zwei Grössen durch einerlei multiplicirt, oder dividirt werden; so bleibt ihr Verhältniß zu einander ungeändert.

§. 275.

§. 275.

L. Hätte man, z. B., das Verhältniß

$$2\sqrt{3} \,..\, 7\sqrt{3};$$

so liesse sich das, wenn man beide Glieder durch $\sqrt{3}$ dividirt, verändern in . . ?

S. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \,..\, \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \,..\, 7$ (§. 194).

L. Man sieht hieraus, daß Verhältnisse zwischen IrrationalZahlen dennoch rational seyn können.

§. 276.

$$\left.\begin{array}{l} \text{L. } a \,..\, b = \frac{a}{a} \,..\, \frac{b}{a} \\ \text{und } a \,..\, b = \frac{a}{b} \,..\, \frac{b}{b} \end{array}\right\} (\text{§. } 274) = 1 \,..\, \frac{b}{a} \\ = \frac{a}{b} \,..\, 1$$

Das heisst: Jedes geometrische Verhältniß läßt sich in ein andres verwandeln, dessen eines Glied = 1 ist. — Wie geschiht das?

S. Wenn man beide Glieder durch eins derselben dividirt; durch das vorderste, nämlich, wenn das vorderste, und durch das nachfolgende, wenn dieses in 1 soll verwandelt werden.

UebungsExempel.

$$5 \,..\, 7 = \frac{5}{5} \,..\, \frac{7}{5} = 1 \,..\, \frac{7}{5}$$

$$5 \,..\, 7 = \frac{5}{7} \,..\, \frac{7}{7} = \frac{5}{7} \,..\, 1.$$

§. 277.

§. 277.

L. Es sei a . . b = m . . n
welches ist der Namen dieser beiden Verhältnisse?

S. Namen a . . b = $\frac{a}{b}$
Namen m . . n = $\frac{m}{n}$ } (§. 268).

L. Beide Verhältnisse aber sind einander gleich. Was folgt daraus?

S. Daß auch $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ (§. 269).

L. Es sei ferner:

c . . d = m . . n;

so ist auch $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ (§. 268, 269)

Wenn also

a . . b = m . . n,
und c . . d = m . . n;

so haben die Verhältnisse a : b und c : d einerlei Namen. Was folgt daraus?

S. Daß a . . b = c . . d (§. 269).

L. In Worte gekleidet, lautet dis: Wenn zwei Verhältnisse (a . . b und c . . d) einem dritten (m . . n) gleich sind;

S. So sind sie einander selbst gleich.

§. 278.

§. 278.

L. Es sei pm . . pn = qm . . qn

a . . b = pm . . pn

c . . d = qm . . qn

Hier sind die Verhältnisse a . . b und c . . d gleichen Verhältnissen gleich. Sind sie es auch unter sich?

S. Ja; denn Namen von

$a \,..\, b = \frac{a}{b} = \frac{pm}{pn}$ (§. 269) $= \frac{m}{n}$

und Namen v. $c \,..\, d = \frac{c}{d} = \frac{qm}{qn}$ (§. 269) $= \frac{m}{n}$

L. Wenn also $\left.\begin{matrix} a \,..\, b = pm \,..\, pn \\ \text{und } c \,..\, d = qm \,..\, qn \end{matrix}\right\} = m \,..\, n$ (§. 274)

$a \,..\, b = c \,..\, d$ (§. 277)

Was heißt das?

S. Verhältnisse welche gleichen Verhältnissen gleich sind, die sind einander selbst gleich.

§. 279.

L. Wenn $a \,..\, b = c \,..\, d$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§. 269)

Wird aber auch umgekehrt, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ seyn?

S. Das weis ich nicht.

L. Wir wollen es untersuchen.

$$\frac{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}{a = \frac{bc}{d}}$$
$$\frac{}{ad = bc}$$
$$\frac{}{d = \frac{bc}{a}}$$
$$\frac{}{\frac{d}{c} = \frac{b}{a}}$$

a : b = c : d
a = bc/d ss.

L. Also? wenn a . . b = c . . d;
so ist nicht nur $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
sondern auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

§. 280.

L. Daher könte man auch das VorderGlied durch das HinterGlied dividirt für den Verhältniß-Namen annehmen, wie Alembert, Kästner, Lorenz, und vielleicht noch Andre, getahn haben. Da

$$a : \frac{a}{b} = a \times \frac{b}{a}$$

so muß man, bei umgekehrtem VerhältnißNamen, multipliciren anstat zu dividiren, und dividiren anstat zu multipliciren. Es sei der VerhältnißNamen n, der umgekehrte u; so ist

$$\frac{a}{n} = au; \quad \frac{a}{n^2} = au^2 \text{ u. s. w.}$$

Gesetzt n wäre ein ächter Bruch, z. B. $\frac{2}{3}$; was wäre dan u?

S. Ein unächter, $\frac{3}{2}$ (§. 73).

L. Und wäre n ein unächter . . ?

S. So wäre u ein ächter (§. 73).

L. Wenn aber n = 1 wäre . . ?

S. Den wäre auch u = 1; denn 1 = $\frac{4}{4}$ (§. 74) bleibt auch umgekehrt $\frac{1}{1}$ = 1.

§. 281.

L. ~~Es sei~~

$$\frac{ad \,..\, a = bd \,..\, b \;(\S\ 269)}{ad \times b = bd \times a \;(\S.\ 18).}$$

Welche Wahrheit enthalten diese Zeichen?

S. In einer geometrischen Proportion ist das Product der beiden äussern Glieder gleich dem Producte der beiden mitlern.

L. Eben diese Wahrheit läßt sich noch auf andre Art beweisen. — Es sei

$$\frac{a \,..\, b = c \,..\, d}{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;(\S.\ 269)}$$

$$\frac{a = \frac{bc}{d}}{ad = bc}$$

Weis man also die äussern Glieder einer geometrischen Proportion, so kan man das Product der mitlern finden durch Multiplication

tion der äussern. Und eben so auch umgekehrt, läßt sich aus den MittelGliedern das Product der AussenGlieder finden.

§. 282.

L. Es sei a . . b = a . . c;
wie verhalten sich nun b und c zu einander? Sind sie einander gleich, oder nicht?

S. a . . b = a . . c (VorausSetz.)

ac = ab (§. 281)

c = b

L. Also Grössen die zu einerlei, gleichen Grössen gleiches Verhältniß haben, sind einander gleich.

§. 283.

L. Also in a : b = c : d
ist ad = bc (§. 281);
aber in a : z = z : b ? ?

S. Ist ab = zz

L. Und z = ? ?

S. $z = \sqrt{zz} = \sqrt{ab}$.

L. Da haben wir also die Auflösung der Aufgabe: Aus den gegebenen AussenGliedern einer stetigen geometrischen Proportion, das MittelGlied zu finden. Und welches ist sie?

S. Aus dem Producte der AussenGlieder (ab) wird die QuadratWurzel gezogen.

UebungsExempel.

$$2 : y = y : 8$$
$$8 : x = x : 72$$
$$15 : v = v : 48.$$

Ausrechnung.

$$y = \sqrt{(2 \times 8)} = \sqrt{16} = 4$$
$$x = \sqrt{(8 \times 72)} = \sqrt{576} = 24$$
$$v = \sqrt{(15 \times 48)} = \sqrt{720} = 26{,}8328 \text{ etc.}$$

§. 284.

L. $\frac{a}{b}$ oder a:b, und $\frac{c}{d}$ oder c:d, als VerhältnißNamen betrachtet; welches sind die ihnen entsprechenden Verhältniss?

S. a . . b und c . . d (§. 268).

L. Wenn nun

$$a : b = c : d;$$

wie sind dan die diesen Namen zugehörigen Verhältnisse beschaffen?

S. Wenn a : b = c : d;
so ist a . . b = c . . d (§. 269).

L. Wie lautet das in Worte gekleidet?

S. Wenn zwei Quotienten einander gleich sind; so lässt sich aus ihnen eine geometrische Proportion bilden, zu welcher die Dividenden die Vorder-, und die Divisoren die HinterGlieder geben.

L. Und von Brüchen, da sie Quotienten gleich sind, gilt ein Gleiches; die Zähler geben alsdan die Vorder-, und die Nenner die HinterGlieder.

UebungsExempel.

$$\frac{\frac{7}{21} = \frac{4}{12}}{7 : 21 = 4 : 12} \quad (9108)$$

$$7 \,..\, 21 = 4 \,..\, 12$$

§. 285.

L. Wenn a . . b = c . . d
so ist ad = bc (§. 281)

Wenn aber

ad = bc

folgt daraus eben so notwendig daß dan auch

a . . b = c . . d

sei?

S. Es kömt nur darauf an, ob $\frac{a}{b}$ gleich $\frac{c}{d}$ ist.

$$ad = bc \quad (V.S.)$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{bc}{d} \\ \hline \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{array}\right\}$$

$$a..b = c..d \quad (§.\ 284).$$

L. Die Factoren zweier gleichen Producte also, lassen sich in eine geometrische Proportion ordnen; aber wie kommen sie zu stehn?

L. Die Factoren des ersten Productes, ad, geben die äussern, und die des zweiten, bc, die mitlern Glieder.

L. Wenn aber $ad = bc$,
so ist auch $bc = ad$
Nun ist, im ersten Fall = = ?

S. $a..b = c..d$

L. Und im zweiten?

S. $b..a = d..c$.

L. Welches Product also die äussern, und welches die mitlern Glieder gibt = = ?

S. Das ist gleichgültig.

L. Wie aber, wenn ein Product aus mehr als zwei Factoren bestünde, wie z. B. $abc = defg$?

S. Sie lassen sich auf zweie bringen, wenn man zwei, oder mehre, für einen annimt.

z. B. abc = defg
= ab×c = def×g
= a×bc = de×fg
= a×bc = d×efg u. s. w.

L. Es ist eine sehr nüzliche Uebung jede Gleichung in eine Proportion aufzulösen.

Uebungs Exempel.

I. $\frac{ae = bcd}{}$

a . . b = cd . . e
a . . bc = d . . e
a . . bcd = 1 . . e
a . . 1 = bcd . . e
u. s. w.

II. $\frac{ab = d}{}$

a . . d = 1 . . b
a . . 1 = d . . b
u. s. w.

III. $\frac{(d = \frac{bc}{a})}{1 . . \frac{b}{a} = c . . d} = \frac{(ad = bc)}{a . . b = c . . d}$

a . . b = c . . d (§. 274).

§. 286.

L. Wenn a . . b = c . . d

so ist ad = bc (§. 281)

und ad = cb
da = bc
da = cb
(§. 20. 17)

Nun aber gibt jedes ProductenPar zwei geometrische Proportionen (§. 285). Vier Par Producte also geben achte. Und diese sind . . ?

S. Erstes Par:

a . . b = c . . d

und b . . a = d . . c

Zweites Par:

a . . c = b . . d

und c . . a = d . . b

Drittes Par:

d . . b = c . . a

und b . . d = a . . c

Viertes Par:

d . . c = b . . a

und c . . d = a . . b.

L. Es erhellt also, daß die Glieder einer geometrischen Proportion acht verschiedene Stellungen leiden. Das ist zu verstehen, die Proportionen bleiben Proportionen, aber geändert; denn die Verhältnisse, aus denen sie bestehn, wer-

den

den verändert, doch so daß sie einander gleich bleiben. — Zur Uebung kan man die Glieder der Proportion

$$a \,..\, ad = b \,..\, bd$$

versetzen, aber so daß die Producte der äussern und mitlern stets einerlei Factoren enthalten.

S. $a \,..\, ad = b \,..\, bd$
$ad \,..\, a = bd \,..\, b$
$ad \,..\, bd = a \,..\, b$
$bd \,..\, ad = b \,..\, a$
$bd \,..\, b = ad \,..\, a$
$b \,..\, bd = a \,..\, ad$
$b \,..\, a = bd \,..\, ad$
$a \,..\, b = ad \,..\, bd.$

§. 287.

L. Dieses sind die Veränderungen, welche man mit den Gliedern einer Proportion vornehmen kan, noch nicht alle.

Es sei $a \,..\, b = c \,..\, d;$
so ist auch $(a+c) \,..\, (b+d) = c \,..\, d$
und $(a-c) \,..\, (b-d) = c \,..\, d$
$\Big\} = a \,..\, b$

Wie läßt sich das wol beweisen?

S.

S. Erster Beweis.

a . . b = c . . d (VS.

ad = bc (§. 281)

ad+cd = bc+cd (G. §. 36)

oder (a+c)d = (b+d)c (§. 143)

(a+c) . . (b+d) = c . . d (§. 286) = a . . b (VS.)

Zweiter Beweis.

a . . b = c . . d (VS.)

ad = bc (§. 281)

ad—cd = bc—cd (G. §. 37)

oder (a—c)d = (b—d)c (§. 143)

(a—c) . . (b—d) = c . . d (§. 286) = a . . b (VS.)

L. Also: a . . b = c . . d

(a ± c) . . (b ± d) = c . . d = a . . b

Wie drükkt man das durch Worte aus?

S. Wenn vier Grössen proportionirt sind; so verhalten sich die Summen, und die Unterschiede der gleichnamigen Glieder, wie die beiden ersten, oder lezten Glieder.

§. 288.

L. Es sei a . . b = c . . d

so ist (a ± b) . . (c ± d) = b . . d = a . . c

Wie wird das bewiesen?

S.

S. a . . b = c . . d

ad = bc (§. 281)

ad ± bd = bc ± bd (G. §. 36, 37)

Das ist: (a ± b)d = (c ± d)b (§. 143)

(a ± b) . . (c ± d) = b . . d = a . . c (§. 286). §4.

L. Wie lautet nun diese Formel in Worten?

S. Wenn vier Grössen proportionirt sind; so verhält sich die Summe, oder der Unterschied, der beiden ersten, zu der Summe, oder dem Unterschiede, der beiden lezten, wie die gleichnamigen Glieder.

§. 289.

L. Es sei a . . b = c . . d = e . . f;

so ist (a ± c ± e) . . (b ± d ± f) = a . . b = c . . d = e . . f

Welches ist der Beweis davon?

S. a . . b = c . . d = e . . f

(a + c) . . (b + d) = a . . b (§. 287) = e . . f

(a + c) . . (b + d) = e . . f (§. 277)

(a + c + e) . . (b + d + f) = e . . f (§. 287) =

c . . d = a . . b (VS.)

L.

L. Man könte auch noch ein viertes Verhältniß g . . h, ja ein fünftes, sechstes ꝛc. hinzufügen, und Summe, so wie Unterschied aller gleichnamigen Glieder würde immer jedem einzelnen Verhältnisse gleich bleiben. Man kan also als ausgemacht annehmen: bei mehr als zwei gleichen Verhältnissen ist Summe und Unterschied aller gleichnamigen Glieder = = ?

S. Gleich jedem einzelnen Verhältnisse.

L. Für a . . b = c . . d = e . . f

pflegt man auch zu schreiben:

a . . c . . e = b . . d . . f

§. 290.

L. a . . b = c . . d
e . . f = g . . h
---
ae . . bf = cg . . dh

Wer kan davon den Beweis geben?

S. a . . b = c . . d
e . . f = g . . h
---
ad = bc
eh = fg } (§. 281)
---
adeh = bcfg (§. 27.)
---
ae . . bf = cg . . dh (§. 285.)

L.

L. Man kan auch noch eine dritte Proportion, ja eine vierte, fünfte hinzufügen, und die Producte der gleichnamigen Glieder, bleiben immer proportionirt. Man kan also als Wahrheit annehmen: Wenn man zwei oder mehr Proportionen ordentlich unter einander schreibt, und die Glieder wie sie unter einander stehen, mit einander multiplicirt; so sind die Producte, in der Ordnung wie sie stehn, auch einander proportionirt.

§. 291.

L. Aber werden die Glieder zweier nach voriger Art geschriebener Proportionen, durch einander dividirt auch proportionirt seyn?

Wenn $a \,..\, b = c \,..\, d$
und $e \,..\, f = g \,..\, h$

ist dan auch $(a:e)\,..\,(b:f) = (c:g)\,..\,(d:h)$?

S. Da Multiplication und Division einander entgegen stehen; so muß es allerdings so seyn.

L. Es ist wahr; aber der Beweis fehlt noch?

S. $\left.\begin{array}{l} a \,..\, b = c \,..\, d \\ e \,..\, f = g \,..\, h \end{array}\right\}$ (VS.)

$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \end{array}\right\}$ (§. 269)

$\frac{a}{b} : \frac{e}{f} = \frac{c}{d} : \frac{g}{h}$ (957)

$\frac{a:e}{b:f} = \frac{c:g}{d:h}$ (999)

$(a:e)\,..\,(b:f) = (c:g)\,..\,(d:h)$ (§. 284).

L.

L. Also $\begin{matrix} a \,..\, b = c \,..\, d \\ e \,..\, f = g \,..\, h \end{matrix}$

$$(a:e)\,..\,(b:f) = (c:g)\,..\,(d:h)$$

Was bedeutet das?

S. Wenn die Glieder zweier unter einander geschriebener Proportionen, so wie sie unter einander stehn, durch einander dividirt werden; so sind die Quotienten, in der Ordnung wie sie stehn, einander proportionirt.

§. 292.

L. Wenn $\begin{matrix} a \,..\, b = c \,..\, d \\ \text{und } a \,..\, b = c \,..\, d \end{matrix}$

$$a^2 \,..\, b^2 = c^2 \,..\, d^2 \text{ (§. 290)}$$

und überhaupt $a^m \,..\, b^m = c^m \,..\, d^m$

Das heißt : : ?

S. Sind vier Grössen einander proportionirt, so sind es auch ihre Potenzen einerlei Grades.

L. Und den GegenSatz:

$$\frac{a \,..\, b = c \,..\, d}{\sqrt[m]{a} \,..\, \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} \,..\, \sqrt[m]{d}}$$

daß

daß wenn vier Gröſſen einander proportionirt sind, es auch ihre Wurzeln gleichen Grades sind, kan man da das WurzelAusziehn im Grunde nichts anders als eine Art von Division ist, ohne weitern Beweis hinnehmen (§. 291).

§. 293.

L. Wenn a . . b = c . . d
und e . . f = g . . h

so ist ae . . bf = cg . . dh (§. 290)

Wenn aber b = e und d = g,
oder a . . b = c . . d
und b . . f = d . . h

so ist a . . f = c . . h

Wie läſst sich das erklären?

S. a . . b = c . . d
b . . f = d . . h

ab . . bf = cd . . dh (§. 290)

a . . f = c . . h (§. 274).

L. Hier waren nach einerlei Ordnung
b = e und d = g;
die Ordnung aber kan auch gestört, und sich selbst entgegen gesetzt seyn:
b = e, und c = h;
oder a . . b = c . . d
b . . f = g . . c

a . . f = g . . d

Es können der nach beiderlei Art geordneten Verhältnisse auch mehr als zwei Par seyn:

1) Mit einerlei Ordnung (ordinatim)

$$\begin{array}{rcl} a..b & = & c..d \\ b..f & = & d..h \\ \underline{f..g} & = & \underline{h..i} \\ a..g & = & c..i \end{array}$$

2) In entgegen gesetzter Ordnung (perturbate)

$$\begin{array}{rcl} a..b & = & c..d \\ b..f & = & g..c \\ \underline{f..h} & = & \underline{i..g} \\ a..h & = & i..d \end{array}$$

Es ist schwer dieses kurz und verständlich in Worte zu fassen, wir wollen uns daher nicht vergeblich bemühen, sondern uns an den Zeichen begnügen, welche deutlich und klar sind.

§. 294.

L. Von einer geometrischen Proportion sind die drei ersten Glieder, a, b, c, bekant; das vierte Glied ist noch unbekant, und mag vorläufig z heissen. Wir haben also:

$$a..b = c..z;$$

Wie

Wie wird nun z gefunden? Welches ist sein Wert? Man muß eine Gleichung suchen, wo z auf einer Seite des GleichheitsZeichens einzeln stehe.

S. bc = az (§. 281)
bc:a = z.

L. Um also zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden, wie verfährt man?

S. Man dividirt das Product des zweiten und dritten Gliedes durch das erste Glied.

L. Eben diese Aufgabe läßt sich auch so ausdrükken: Es wird gegeben ein Verhältniß (a . . b); man soll ein andres finden, welches dem gegebenen gleich ist, und zu seinem VorderGliede eine gleichfalls gegebene Grösse (c) hat.

UebungsExempel.

1) a . . ad = b . . α
α = adb:a = bd

2) ad . . bd = a . . β
β = abd:ad = b

3) ad . . bd = b . . γ
γ = bbd:ad = $\frac{bb}{a}$

4) 24 . . 15 = 40 . . δ
$\delta = \frac{15 \times 40}{24} = \frac{3 \times 5 \times 8 \times 5}{3 \times 8} = 5 \times 5 = 25$

5) $2 \cdot . 5 = 7 \cdot . \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2} = 17 + \frac{1}{2}$

6) $2 \cdot . 5 = 1 \cdot . \zeta$

$\zeta = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

7) $1 \cdot . 5 = 7 \cdot . \eta$

$\eta = 5 \times 7 = 35$

8) $2 \cdot . 3 = \frac{4}{5} \cdot . \vartheta$

$\vartheta = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$

9) $\frac{3}{4} \cdot . 2 = 5 \cdot . \iota$

$\iota = \frac{2 \times 5 \times 4}{3} = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$

10) $\frac{3}{4} \cdot . \frac{4}{5} = 6 \cdot . \varkappa$

$\varkappa = \frac{4 \times 6 \times 4}{5 \times 3} = \frac{32}{5}$

11) $\frac{2}{3} \cdot . \frac{4}{5} = \frac{6}{7} \cdot . \lambda$

$\lambda = \frac{4 \times 6 \times 3}{5 \times 7 \times 2} = \frac{36}{35}$

12) $(4 + \frac{2}{3}) \cdot . \frac{3}{4} = (1 + \frac{5}{6}) \cdot . \mu$

Oder $\frac{14}{3} \cdot . \frac{3}{4} = \frac{11}{6} \cdot . \mu$

$\mu = \frac{3 \times 11 \times 3}{4 \times 6 \times 14} = \frac{33}{112}$

13) $(2 + \frac{3}{8}) \cdot . (3 + \frac{1}{2}) = (5 + \frac{2}{3}) \cdot . ,$

Oder $\frac{19}{8} \cdot . \frac{7}{2} = \frac{17}{3} \cdot . ,$

$, = \frac{7 \times 17 \times 8}{2 \times 3 \times 19} = \frac{476}{57} = 8 + \frac{20}{57}$

14) $a \cdot . \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot . \xi$

$\xi = \frac{aa}{nn} : a = \frac{a}{nn}$

15) $a \cdot . au = au \cdot . \pi$

$\pi = \frac{aauu}{a} = auu$

16)

16) $a \,..\, \frac{a}{n} = \frac{a}{n^2} \,..\, e$

$$e = \frac{aa}{annn} = \frac{a}{n^3} = \frac{a^n}{a^3}$$

17) $a \,..\, au = au^2 \,..\, \sigma$

$$\sigma = \frac{aauuu}{a} = au^3$$

18) $a \,..\, au = au^3 \,..\, \tau$

$$\tau = \frac{a^2u^4}{a} = au^4$$

§. 295.

L. Eine ſtetige Proportion beſteht nur aus drei Gliedern:

$\div\div\, a \,..\, b \,..\, z$

Wie läſſt ſie ſich ſonſt noch ausdrükken?

S. $\div\div\, a\tau \,..\, b\tau \,..\, z = a\tau \,..\, b = b\tau \,..\, z$ (§. 271)

L. Wie wird nun zu zwei gegebenen Gröſſen (a, b) die dritte geometriſche Proportional-Gröſſe z gefunden?

S. Man behandelt die dreigliedrige Proportion wie eine viergliedrige §. 294, und dividirt das Quadrat des zweiten Gliedes durch das erſte.

$(z = bb : a)$ (§. 294).

Exempel.

1) $\div\div\, a \,..\, \frac{a}{n} \,..\, y$

$$y = \frac{aa}{ann} = \frac{a}{nn}$$

2) $\div\div\, a \,..\, au \,..\, x$

$$x = \frac{aauu}{a} = auu.$$

Anwendung der Lehre von geometrischen Proportionen.

§. 296.

L. Die Aufgabe: Zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometrische ProportionalZahl zu finden, (§. 294, 295) wird von den Rechen-Meistern die Regel Detri, (gleichsam regula de tribus *numeris*) genant. Sie ist von unendlichem Nutzen, nicht nur in der Mathematik, sondern auch in andern Künsten und Wissenschaften, und im gemeinen Leben. Ueberall nämlich, wo vier Zahlen vorkommen, von denen zweie und zweie einerlei Verhältniß zu einander haben, da findet sie Anwendung. So ist, z. B. im Handel, mehrenteils die Grösse, oder die Menge der Ware dem Preise derselben proportionirt. Wenn z. B. 2 Pfund 5 Groschen gilt, was gelten dan 4 Pfund?

S. 10 Groschen.

L. Die Geometer pflegen dieses so zu setzen:
2 Pfund .. 4 Pfund = 5 Groschen .. $\frac{4 \times 5}{2}$ Groschen.

Die Rechenmeister aber:
2 Pfund (kosten) 5 Groschen; was (kosten) 4 Pfund?

Antwort: 10 Groschen
welches mit dem vorigen auf eins herauskömt, weil $4 \times 5 = 5 \times 4$ (§. 17.)

§. 297.

L. 3 Pfund gelten 4 Taler, wie viel gelten 7 Pfund? Wer kan mir das im Kopf ausrechnen?

S. Wenn 3 Pfund 4 Taler gelten, so gilt 1 Pfund $\frac{4}{3}$ Taler = 1 Taler und 8 Groschen; und gilt 1 Pfund $\frac{4}{3}$ Tl.; so gelten 7 Pfund $(\frac{4}{3} \times 7)$ Tl. oder 7 Mal 1 Tl. 8 Gr., das ist 9 Taler 8 Groschen.

L. Setzt man eben dieses nach den Regeln der Proportion, so kömt es so zu stehn:

3 ℔ . . 7 ℔ = 4 Tl. . . z

$z = \frac{4 \times 7}{3}$ Tl. (§. 294) $(\frac{4}{3} \times 7)$ Taler

so wie vorhin.

Dieses zur Probe, daß man sich von der Regel Detri auch einen Begriff machen kan, ohne die Namen Verhältniß und Proportion zu kennen; und daß beide RechnungsArten vollkommen überein treffen, obgleich auf verschiedenen Wegen.

§. 298.

UebungsExempel.

1) 3 Pfund kosten 7 Taler: was kosten 15 Pfund?

Antwort: $\frac{7 \times 15}{3} = 7 \times 5 = 35$ Taler.

2) $\frac{3}{4}$ Ellen gelten 15 Groschen: was gilt 1 Elle?

Antw. $(15 : \frac{3}{4})$ Gr. $= \frac{15 \times 4}{3} = 5 \times 4 = 20$ Gr.

3) 1 Rute ist verdungen für 8 Gr. wie viel werden $25\frac{3}{4}$ Ruten kosten?

Antw. $\frac{103 \times 8}{4}$ Gr. $= 103 \times 2 = 206$ Gr.

4) 24 Gute-Groschen machen 1 ReichsTaler: wie viel Taler machen 206 Gute-Groschen?

A. $\frac{206}{24}$ Tl. $= 8 + \frac{14}{24}$ Tl. $= 8$ Tl. 14 Sgr.

5) 1 ReichsTaler gilt 24 Gute-Groschen: was gelten $\frac{3}{5}$ ReichsTaler?

A. $\frac{24 \times 3}{5}$ Sgr. $= \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$ Sgr.

6) 1 Guter-Groschen gilt 12 Pfennige: was gelten $\frac{2}{5}$ Gute-Groschen?

A. $\frac{12 \times 2}{5}$ pf $= \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ pf.

7) 10 klevische Stüber gelten 4 Gute-Groschen: was gilt 1 Stüber?

A. $\frac{4}{10}$ Sgr. $= \frac{2}{5}$ Sgr. $= 4\frac{4}{5}$ pf.

8) 30 Kreuzer machen 8 Gute-Groschen: was machen 3 Kreuzer?

A. $\frac{8 \times 3}{30}$ Sgr. $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ Sgr. $= 9\frac{3}{5}$ pf.

9) 3 Gulden machen 2 ReichsTaler: was machen 100 Gulden?

A. $\frac{100 \times 2}{3}$ Tl. $= \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ Tl. $= 66$ Tl. 16 Sgr.

10) 100 Taler tragen jährlich 4 Taler Zinsen: was tragen 772 Taler?

A. $\frac{772 \times 4}{100}$ Tl. $= \frac{772}{25} = 30\frac{22}{25}$ Tl. $= 30$ Tl. $21\frac{3}{25}$ Gr.
$= 30$ Tl. 21 Sgr. $1\frac{11}{25}$ pf.

11) $\frac{1}{2}$ Pfund gilt $\frac{2}{3}$ Tl. was gelten $\frac{3}{4}$ Pfund?

A. $\frac{2 \times 3 \times 2}{3 \times 4 \times 1}$ Tl. = 1 Tl.

12) 100 Taler bringen 4 Taler Zinsen: was bringen $709\frac{1}{6}$ Taler?

A. $\frac{(709+\frac{1}{6} \times 4}{100}$ Tl. $= \frac{2836+\frac{2}{3}}{100}$ Tl. $= \frac{8510:3}{100}$ Tl.

$= \frac{85\frac{1}{3}0}{30} = (28 + \frac{11}{30})$ Tl. $= 28$ Tl. $8\frac{4}{5}$ Sgr.

$= 28$ Tl. 8 Sgr. $9\frac{3}{5}$ pf.

13) $7\frac{3}{4}$ Pfund kosten $2\frac{1}{2}$ Taler: was kosten 2 Pfund?

Oder $\frac{31}{4}$ Pf. = $\frac{5}{2}$ Tl. = 2 Pf.

A. $\frac{5 \times 2 \times 4}{2 \times 31}$ Tl. $= \frac{20}{31}$ Tl. $= \frac{20 \times 24}{31}$ Sgr. $= 15\frac{15}{31}$ Sgr.

$= 15$ Sgr. $+ \frac{15 \times 12}{31}$ pf. $= 15$ Sgr. $5\frac{25}{31}$ pf.

14) 1391,3 pariser Fuß machen 1440 rheinländische: wie viel rheinländische Fuß betragen 6 pariser?

A. $\frac{1440 \times 6}{1391,3} = \frac{8640}{1391,3} = 6 + \frac{2922}{1391,3} = 6,21$ Fuß.

15) 100 Taler in Friedrichsd'or gelten $10\frac{1}{4}$ Taler Aufgeld: wie viel Aufgeld gelten 5 Taler?

A. $\frac{41 \times 5}{4 \times 100}$ Tl. $= \frac{41}{80}$ Tl. $\frac{41 \times 24}{80}$ Sgr. $= \frac{41 \times 3}{10} = \frac{123}{10}$

$= 12\frac{3}{10}$ Sgr. $= 12$ Sgr. $\frac{36}{10}$ pf. $= 12$ Sgr. $3\frac{3}{5}$ pf.

16) 100 Taler in Ducaten gelten $14\frac{2}{3}$ Taler Aufgeld: was gelten $2\frac{3}{4}$ Taler?

A. $\frac{44 \times 11}{3 \times 4 \times 100}$ Tl. $= \frac{11 \times 11}{3 \times 100}$ Tl. $= \frac{121 \times 24}{300}$ Sgr.

$= \frac{121 \times 2}{25}$ Sgr. $= \frac{242}{25}$ Sgr. $= 9$ Sgr. $+ \frac{17 \times 12}{25}$ pf.

$= 9$ Sgr. $+ \frac{204}{25}$ pf. $= 9$ Sgr. $+ 8\frac{4}{25}$ pf.

§. 299.

Ein jedes RegelDetri-Exempel läßt sich auf vierlei Art ausdrukken und berechnen. Als Beispiel mag das §. 296 dienen:

1) 3 ℔ kosten 5 Gr.; was 4 ℔? — A. 10 Gr.

4 ℔ kosten 10 Gr.; was 2 ℔? — A. 5 Gr.

Für 5 Gr. kauft man 2 ℔; wie viel für 10 Gr.?

Antw. 4 ℔.

Für 10 G. kauft man 4 ℔; wie viel für 5 Gr.?

Antw. 2 ℔.

Dieses zur Nachricht denen welchen an den hier beigebrachten Exempeln nicht genügt.

§. 300.

Zuweilen sind Glieder aus Teilen zusammengesetzt: Z. B 5 Pfund kosten 3 Taler 12 Sgr.: was kosten 8 Pfund?

Da ist man dan genötigt die verschiedenen Teile, wie hier die Taler und Groschen, auf einerlei Einheiten zu bringen; das heisst, alles in Taler, oder alles in Groschen auszudrukken, je nachdem man dieses oder jenes bequemer findet.

Obiges Exempel kan also so stehn:

5 Pf. . . 8 Pf. = $3\frac{1}{2}$ Tl. . . x

$x = \frac{7 \times 8}{2 \times 5}$ T $= \frac{56}{10}$ T. $= 5$ T. $+ \frac{3 \times 24}{5}$ Gr. $= 5$ T. $+ 7\frac{2}{5}$ Gr.

$= 5$ T. $+ 14$ Gr. $+ \frac{2 \times 12}{5}$ pf. $= 5$ Tl. $+ 14$ Gr. $+ \frac{24}{5}$ pf.

$= 5$ T. 14 Ggr. $4\frac{4}{5}$ pf.

Oder man kan es auch so setzen:

5 Pf . . 8 Pf. = 3 Tl. 12 Gr. . . x

durch 24 multipl.

72

12 addirt

84 Ggr.

$x = \frac{84 \times 8}{5}$ Gr. $= 134\frac{2}{5}$ Gr. $= 5$ Tl. 14 Gr. $4\frac{4}{5}$ pf.

Uebungs Exempel.

1) 7 Pfund und 24 Lot, kosten 2 Taler 12 Ggr.: was kosten 2 Lot?

Kan stehn:

248 L. . . 2 L. = 60 Ggr. . . x.

Oder auch:

$$\frac{(7 + \frac{3}{4})\text{ Pf.} \;..\; \frac{1}{16}\text{ Pf.} = (2 + \frac{1}{2})\text{ Tl.} \;..\; y}{}$$

Das ist $\frac{31}{4}$ Pf. . . $\frac{1}{16}$ Pf. = $\frac{5}{2}$ Tl. . . y

$x = \frac{60 \times 2}{248}$ Gr. $= \frac{60}{124} = \frac{15}{31}$ Gr.

$y = \frac{5 \times 1 \times 4}{2 \times 16 \times 31}$ Tl. $= \frac{5}{8 \times 31} = \frac{5}{248}$ T. $= \frac{5 \times 24}{248}$ G.

$= \frac{5 \times 3}{31} = \frac{15}{31}$ Gr. $= \frac{15 \times 12}{31}$ pf. $= \frac{180}{31} = (5 + \frac{25}{31})$ pf.

2) 7 Pf. 24 Lot kosten 2 Tl. 12 Sgr.; was 2 Pf.?

Kan stehn:

248 L. . . 64 L. = 60 Gr. . . x

Oder auch:

$(7+\frac{3}{4})$ Pf. . . 2 Pf. $= (2+\frac{1}{2})$ Tl. . . y

$x = \frac{64 \times 60}{248}$ Gr. $= \frac{60 \times 8}{31} = \frac{480}{31} = 15$ Gr. $5\frac{25}{31}$ pf.

y. In dieser Gestalt ist dieses Exempel schon §. 298 Nro. 13 vorgekommen.

Es erhellt übrigens aus diesem Exempel, daß die Verwandlung auch Stat finden kan, ohne daß ein Glied zusammen gesetzt, sei, wie hier das zweite, wo die 2 Pfunde zu Loten: musten gemacht werden, weil das erste Glied Lote hatte.

3) 4 Pfund kosten 7 ReichsTaler: was 10 Lot?

A. $\frac{70}{4 \times 32}$ Tl. $= \frac{35}{64}$ Tl $= \frac{35 \times 24}{64}$ Gr $= \frac{35 \times 3}{8}$ Gr.

$= \frac{105}{8}$ Gr. $= 13$ Gr. $+ \frac{1}{8}$ Gr. $= 13$ Gr. $+ \frac{12}{8}$ pf.

$= 13$ G . $1\frac{1}{2}$ pf.

(Man vergleiche Busse's gemeinverständliches Rechenbuch, T. II. §. 476 f.)

4) 1 Pfund kostet 5 Gr. 6 pf.: was kostet 1 Lot?

A. $\frac{66}{32}$ pf. $= \frac{33}{16}$ pf. $= 2\frac{1}{16}$ pf.

5) 772 Rlr. tragen 30 Tl. 21 Sgr. $1\frac{11}{25}$ pf. Zinsen: was tragen 100 Taler?

A. $\frac{222336 \times 100}{25 \times 772}$ pf. $= \frac{222336 \times 4}{772}$ pf. $= \frac{222336}{193}$ pf.

$= 1152$ pf. $= 96$ Sgr. $= 4$ Taler.

6)

6) 709 Taler 4 Sgr. bringen 28 Tl. 8 Sgr. $9\frac{3}{5}$ pf. Zinsen: was bringen 100 Taler?

A. $\frac{40848 \times 2400}{5 \times 17020}$ pf. $= \frac{40848 \times 48}{1702}$ pf.

$= \frac{40848 \times 24}{851} = 1152$ pf. $= 90$ Sgr. $= 4$ Tlr.

7) 1 Quentchen kostet 8 pf.: was kosten 2 Zentner?

Man kan sich die Arbeit sehr erleichtern, wenn man sich begnügt, diese Operationen bloß durch Zeichen anzudeuten:

A. $(2 \times 110 \times 32 \times 4 \times 8)$ pf. $= \frac{220 \times 32 \times 4 \times 8 \text{ G.}}{\text{XZ, } 3}$

$= \frac{220 \times 32}{3 \times 3}$ Tl. $= \frac{7040}{9}$ Tl. $= 782\frac{2}{9}$ Tl.

$\frac{2}{9}$ Tl. $= \frac{2 \times 24}{9}$ Gr. $= \frac{16}{3} = (5 + \frac{1}{3})$ Gr. $= 5$ Gr. 4 pf.

§. 301.

Zuweilen kan man sich dieser Verwandlung überheben. Man setze:

1 Pf. kostet 3 Tl. 8 Gr. 6 pf.: was kosten 6 Pfund?

Hier ist das vierte Glied

$(3 \text{ Tl.} + 8 \text{ Sgr.} + 6 \text{ pf.}) \times 6$

$= 18 \text{ Tl.} + 48 \text{ Sgr.} + 36 \text{ pf.}$

$= 20 \text{ Tl.} + 3 \text{ Sgr.};$

welches ohne Reduction leicht erhalten wird. —

Uebungs-Exempel.

1) 3 Pfund kosten 5 Tl. 15 Gr. 8 pf.: was 6 Pf?

A. $\frac{(5\text{ Tl.} + 15\text{ Gr.} + 8\text{ pf.}) \times 6}{3} = (5\text{ Tl.} + 15\text{ Gr.} + 8\text{ pf}) \times 2$

$= 11$ Tlr. 7 Gr. 4 pf.

2) 5 Pfund kosten 10 Tl. 20 Ggr. was 6 Pfund?

A. $\frac{(10\text{ Tl.} + 20\text{ Gr.}) \times 6}{5} = (2\text{ Tl.} \times 4\text{ Gr.}) \times 6 = 13\text{ Tl.}$

3) $\frac{1}{2}$ Elle kostet 8 Ggr. 6 pf.: was kosten 3 Ellen?

A. $\frac{(8\text{ Gr.} + 6\text{ pf.}) \times 3}{1:2} = (8\text{ Gr.} + 6\text{ pf.}) \times 6 = 2\text{ Tl. } 3\text{ Gr.}$

4) $3\frac{1}{2}$ Schfl. kosten 2 Tl. 3 Gr. 5 pf. was 7 Schfl.?

A. $\frac{(2\text{ Tl.} + 3\text{ Gr.} + 5\text{ pf.}) \times 7}{7:2} = (2\text{ T.} + 3\text{ Gr.} + 5\text{ pf.}) \times 2$

$= 4$ Tl. 6 Ggr. 10 pf.

§. 302.

Exempel, wo die Regel Detri zwei Mal muß angewendet werden, um die verlangte Zahl herauszubringen.

1) 300 Tlr. Capital bringen in 2 Jahren 36 Tlr. Zinsen: was bringen 2000 Tl. in 12 Jahren?

Steht so:

a) 300 Capt.: 2000 Cap. $= 36$ Zins. x

Da 36 Tl. die Zinsen von 300 Tl. auf 2 Jahr sind, so ist klar, daß

$x = \frac{20 \times 36}{3} = 20 \times 12 = 240$

auch

auch nur zweijährige Zinsen von 2000 Talern sind. Will man daher die 12jährigen Zinsen haben, so wird noch eine zweite Operation erfodert:

b) 2 Jahre : 12 Jahre = 20 × 12 Tl. : z

$$z = \frac{240 \times 12}{2} = 240 \times 6 = 1440 \text{ Tl.}$$

Nach diesem Muster sind nun auch die folgenden Exempel zu berechnen.

2) 7000 Tl. Capital geben in 12 Jahren 4000 Tl. Zinsen : was geben 13000 Tl. Capital in 9 Jahren?

a) 7000 C. ... 13000 C. = 4000 Z. ... $\frac{13000 \times 4}{7}$

b) 12 Jahre . . 9 Jahre = $\frac{13000 \times 4}{7}$ Tl. . . x

$$x = \frac{13000 \times 4 \times 9}{7 \times 12} = \frac{13000 \times 3}{7} = \frac{39000}{7}$$

$$= 5571\tfrac{3}{7} \text{ Tl.}$$

3) 100 Taler Capital tragen in 2 Jahren 9 Taler Zinsen: was tragen 2000 Taler Capital in 5 Jahren und 7 Monaten?

a) 100 C. . . 2000 C. = 9 Z. . . $\frac{2000 \times 9}{100}$

b) 2 Jahre . . $5\frac{7}{12}$ Jahre = (20 × 9) Tl. . . x

$$x = \frac{(20 \times 9) \times 67}{2 \times 12} = \frac{10 \times 3 \times 67}{4} = \frac{2010}{4} = \frac{1005}{2}$$

$$= 502\tfrac{1}{2} \text{ Taler.}$$

§. 303.

Man nenne das erste Capital c, die Zinsen z, und die Zeit in welcher sie einkommen, t; das zweite Capital C, die Zinsen davon Z, und die Zeit T; so sieht das Verfahren so aus:

a) $c \,..\, C = z \,..\, \frac{Cz}{c}$

b) $t \,..\, T = \frac{Cz}{c} \,..\, Z$

$$Z = \frac{CTz}{ct}$$

Die gesuchten Zinsen also sind $\frac{CTz}{ct}$

Eben diese aber hätte man, durch eine einzige Operation, so gefunden:

$$ct \,..\, CT = z \,..\, \left(\frac{CTz}{ct} = Z\right)$$

Das heisst: Die Zinsen z und Z verhalten sich zu einander wie die Producte aus den Capitalien in die Zeiten. Die vorigen Exempel (§. 301) nach dieser Art berechnet, sehn so aus:

1) $(300 \times 2) \,..\, (20000 \times 12) = 36 \,..\, \frac{2000 \times 12 \times 36}{300 \times 2}$

2) $(7000 \times 12) \,..\, (13000 \times 9) = 4000 \,..\, \frac{13000 \times 3}{7}$

3) $(100 \times 2) \,..\, (2000 \times 5\frac{7}{12}) = 9 \,..\, \frac{20 \times \frac{67}{12} \times 9}{2}$

Diese abgekürzte ZinsRechnung heisst in den RechenBüchern die RegulaQuinque, gleichsam die Regel von fünf Sätzen: ihr Gebrauch aber

aber ist nicht blos auf die ZinsRechnung eingeschränkt, wie folgendes Exempel lehrt:

25 Mann machen in 8 Tagen einen Graben 320 Fuß lang: wie lang werden 42 Mann in 6 Tagen ihn machen?

$$(25 \times 8) \,..\, (42 \times 6) = 320 \,..\, z$$

$$z = \frac{42 \times 6 \times 320}{25 \times 8} = \frac{42 \times 6 \times 40}{25}$$

$$= \frac{252 \times 8}{5} = \frac{2016}{5} = 403\tfrac{1}{5}$$

§. 304.

Noch ein Fall, wo die Regel detri mehr als ein Mal angewendet werden muß, ist die Gesellschafts-Rechnung, wo Zweie oder Mehre, eine Einnahme oder Ausgabe, einen Gewinst oder Verlust, nach gewissen Verhältnissen, teilen. Ein Exempel dieser Art ist:

A und B legen zusammen

A = 2000 Taler = a
B = 1000 „ = b

A + B = 3000 Taler = a + b

Hiermit gewinnen sie 600 Taler = z + y

Es ist klar, daß der Gewinst hier nicht unter Beiden gleich verteilt werden müsse, sondern nach Verhältniß der Einlage; so nämlich daß A, welcher

zwei

zwei Mal so viel eingelegt hat als B, auch zwei Mal so viel vom Gewinst erhalte. Wil man daher wissen, welcher Anteil A von dem Gewinste gebühre; so wird das so gefunden:

Wie sich verhält die ganze Einlage $= a + b$

zum ganzen Gewinst $= z + y$

so verhält sich die einzelne Einlage von $A = a$

zum einzelnen Gewinst von $A = z = \frac{(z+y)a}{a+b}$ (§. 243)

Auf eben die Art wird der Anteil von B

$= y = \frac{(z+y)b}{a+b}$ gefunden.

Und so wäre denn in Zahlen $z = \frac{600 \times 2000}{3000} = 400$

$y = \frac{600 \times 1000}{3000} = 200$

Die Geometer nennen dieses Verfahren:
Eine Zahl $e = z + y$, in zwei ungleiche Teile zu teilen, die sich verhalten wie zwei Zahlen a und b. (Käſtners Arithm. Cap. V. §. 42).

§. 305.

Es können der Teilnehmer auch mehr als zweie seyn. Wir wollen annehmen, es legen A, B, und C zusammen:

Ein-

Einlage A = 1000 = a
" B = 700 = b
" C = 900 = c

Summe der Einlage = 2600 = a + b + c
Summe d. Gewinstes = 1500 = z + y + x = E
Alsdan ist (a + b + c) . . E = a . . z
= b : y
= c : x

$$z = \frac{Ea}{a+b+c} = \frac{1500 \times 1000}{2600} = \frac{15000}{26}$$

$$y = \frac{Eb}{a+b+c} = \frac{1500 \times 700}{2600} = \frac{10500}{26}$$

$$x = \frac{Ec}{a+b+c} = \frac{1500 \times 900}{2600} = \frac{13500}{26}$$

Dieses Verfahren heisst: Eine Zahl E in mehre Teile teilen, die sich verhalten wie gegebene Zahlen a, b, c, u. s. w. Man dividirt zu dem Ende die gegebene Zahl E, durch die Summe der Glieder des Verhältnisses, und multiplicirt den Quotienten $\frac{E}{a+b+c..}$ Durch jedes einzelne Glied:

$\frac{Ea}{a+b+c}$, $\frac{Eb}{a+b+c}$, $\frac{Ec}{a+b+c}$ u. s. w.

Uebungs-Exempel.

Einlage A = 2500 = a
B = 2000 = b
C = 1800 = c
D = 500 = d

Summe der Einlage = 6800 = a + b + c + d = F
Gemeinsch. Verlust = 1794 = z + y + x + v = E

Aus-

Ausrechnung.

$$z = \frac{Ea}{F} = \frac{1794 \times 25}{68} = \frac{22425}{34} = 659\frac{19}{34}$$

$$y = \frac{Eb}{F} = \frac{1794 \times 20}{68} = \frac{17940}{34} = 527\frac{11}{17}$$

$$x = \frac{Ec}{F} = \frac{1794 \times 18}{68} = \frac{16146}{34} = 474\frac{15}{17}$$

$$v = \frac{Ed}{F} = \frac{1794 \times 5}{68} = \frac{4485}{34} = 131\frac{31}{34}$$

Probe.

$$\begin{aligned} z &= 659 + \tfrac{19}{34} \\ y &= 527 + \tfrac{22}{34} \\ x &= 474 + \tfrac{30}{34} \\ v &= 131 + \tfrac{31}{34} \\ \hline &= 1791 + \tfrac{102}{34} \\ \hline &= 1794 \end{aligned}$$

§. 306.

Mit der GesellschafsRechnung ist die VermischungsRechnung einerlei, und beide kan man unter dem gemeinschaftlichen Namen VerteilungsoderRepartitionsRechnung begreifen. Durch die VermischungsRechnung wird gefunden, wie viel von jeder Materie zu einer bestimmten Mischung kömt, zu welcher die Verhältnisse gegeben sind. So stehn, z. B., die zu einem guten SchießPulver erfoderlichen Zutaten in folgendem Verhältnisse:

Sal-

Salpeter = 16 = a
Kohlen = 3 = b
Schwefel = 2 = c

Pulver = 21 = a + b + c = F

Die Frage ist: Wie viel von jedem Ingredienz werden zu einem Zentner, oder

110 Pfund = z + y + x = E

erfodert?

Ausrechnung.

$z = \frac{Ea}{F} = \frac{110 \times 16}{21} = \frac{1760}{21} = 83 + \frac{17}{21}$ = Salpeter.

$y = \frac{Eb}{F} = \frac{110 \times 3}{21} = \frac{110}{7} = 15 + \frac{5}{7}$ = Kohlen.

$x = \frac{Ec}{F} = \frac{110 \times 2}{21} = \frac{220}{21} = 10 + \frac{10}{21}$ = Schwefel.

Probe.

Salpeter = $83 + \frac{17}{21}$
Kohlen = $15 + \frac{15}{21}$
Schwefel = $10 + \frac{10}{21}$

Pulver = 110

§. 307.

Noch eine RechnungsArt wo die Regel detri mehr als ein Mal angewandt wird, ist die Ketten-Rechnung, Ketten-Regel, oder Regel Multiplex. Ein Exempel davon ist:

3 MarienGroschen machen 2 GuteGroschen;
24 GuteGroschen machen 1 Taler;
11 Taler machen 4 Duc:

wie viel MarienGroschen gehn auf 1 Ducaten?

Hier muß man suchen:

a) wie viel MarienGroschen auf 1 Taler;
b) wie viel Mgr. auf 11 Taler = 4 Ducaten;
u. c) wie viel Mgr. auf 1 Ducaten gehn?

Ausrechnung.

a) 2 Ggr. . . 3 Mgr. = 24 Ggr. . . 36 Mgr.
b) 1 Taler. . 11 Tl. = 36 Mgr. . . (36×11)Mgr
c) 4 Duc. . . 1 Duc. = (36×11)Mgr. . . 99Mgr.

Andres Exempel.

Eine Mark feines Gold hält 288 Grän;
284 Grän fein Gold gehn auf eine Mark DucatenGold;
aus einer Mark DucatenGold werden geprägt 67 Duc.
ein Ducaten gilt 4 Gulden;
18 Gulden enthalten eine Mark fein Silber:
welches ist, nach dieser Annahme des leipziger und Reichs-MünzFusses, das Verhältniß des feinen Goldes zum feinen Silber?

Ausrechnung.

a) 284 Grän .. 288 Grän = 67 Duc. .. $\frac{72}{71} \times \frac{67}{1}$ Duc.

b) 1 Duc. .. $\frac{72}{71} \times \frac{67}{1}$ Duc. = 4 Fl. .. $\frac{72 \times 67 \times 4}{71}$ Fl.

c) 18 Fl. .. $\frac{72 \times 67 \times 4}{71}$ Fl. = 1 Mk. S. .. $\frac{1072}{71}$ Mk S.

Die Mark feines Gold verhält sich also zu der Mark feines Silber, wie 1 zu $\frac{1072}{71} = 1 .. 15\frac{7}{71}$ *).

(Eine Abkürzung dieser Rechnung wird weiter unten vorkommen).

§. 308.

Es folget noch ein Nachtrag von Exempeln einfacher Regel detri, deren Ausrechnung einige Behutsamkeit erfodert.

4 Arbeiter vollenden ein Werk in 6 Tagen: in wie viel Zeit werden 8 Arbeiter damit zu Stande kommen?

Es ist klar, daß zu einerlei Verrichtung 8 Arbeiter nur halb so viel Zeit brauchen als 4, und daß folglich die Proportion so stehn müsse:

*) Nach Kästners, oder richtiger Graumanns Angabe (Kästners Fortf. der Rechenk. Abschn. III.) Brodhagen hat für 284 nur 283 Grän, und anstat 4 Gulden, 6 Mark Banco. (Handbuch der Arithm. S. 111); und dan ist das Verhältniß = 1 .. 8090 ::

8 Arbeiter . . 4 Arbeiter = 6 Tage . . 3 Tage.

Wer dafür setzen wollte:

4 Arbeiter brauchen 6 Tage: wie viel Tage brauchen 8 Arbeiter?

würde ein unrichtiges Resultat herausbringen, er müste denn, wider die Regel (§. 294), das Product der beiden ersten Glieder durch das dritte Glied dividiren. Und wirklich findet man in RechenBüchern dieses Verfahren vorgeschrieben, unter dem Namen der verkehrten Regel detri; die man aber entbehren kan, wenn man die Glieder der Proportion mit Verstande ordnet.

UebungsExempel.

1) 15 Arbeiter vollführen ein Werk in 26 Tagen: wie lange werden 9 Arbeiter damit zubringen?

Antwort: $\frac{15 \times 26}{9}$ Tage $= \frac{130}{3} = 43\frac{1}{3}$.

2) 13 Arbeiter verfertigen ein Werk in 7 Tagen: wie viel Arbeiter werden erfodert, um es in 4 Tagen zu vollenden?

Antw. $22\frac{3}{4}$ Arbeiter.

3) Ein Werk wird in 12 Tagen vollendet, wenn man täglich 4 Stunden daran arbeitet: in wie viel Tagen wird es fertig, wenn man täglich 5 Stunden darauf verwendet.

Antw. In $9\frac{3}{5}$ Tagen.

4) Ein EilBote kömt in 8 Tagen zur Stelle, wenn er täglich 16 Meilen macht: wie viel Meilen muß er machen, um in 6 Tagen anzukommen?

Antw. $21\frac{1}{3}$ Meile.

5) 3500 Mann haben auf 162 Tage Unterhalt: wie lange würden 4800 Mann damit auskommen?

Antw. $118\frac{1}{8}$ Tage.

6) Wenn der Scheffel Korn 2 Taler gilt, so wiegt ein Groschenbrod 3 Pfund: wie viel wird es wiegen wenn der Scheffel 1 Taler 8 Groschen gilt?

Antw. $4\frac{1}{2}$ Pfund.

7) Von einem 2 Ellen breiten Zeuge werden 3 Ellen zu einem Rokk erfodert: wie viel braucht man dazu von einem Zeuge, daß nur $\frac{3}{4}$ Ellen breit ist?

Antw. 8 Ellen.

8) Wie lange müssen 780 Taler ausstehen, um zu gleichen Procenten, so viele Zinsen zu bringen, als 5000 Taler in 5 Monaten?

Antw. $32\frac{2}{39}$ Monat.

9) Wie groß muß das Capital seyn, daß in 32 Monaten so viele Zinsen trägt, als 5000 Tlr. in 5 Monaten?

Antw. $781\frac{1}{4}$ Taler.

§. 309.

Es gibt der Fälle, wo Unbehutsame anstossen können, noch mehre. So würde man, z. B., sehr unrichtig schließen:

Ein Körper fält in 1 Secunde 15 Fuß:
folglich fält er in 2 Secunden 15 × 2 F.
in 3 Secunden 15 × 3 F.
u. s. w.

Oder:

Aus einem Fasse laufen in 2 Minuten 3 Kannen; folglich laufen in 4 Minuten 3 × 2 Kannen heraus; indem die Erfahrung lehrt, daß mit jedem Augenblikke die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers zu-, und die einer ausrinnenden Flüssigkeit, abnimt.

Zweitens kan man sehr leicht fehlen bei Berechnung der LänderGrösse, wenn man z. B. schließen wolte:

25 französische LängenMeilen machen 15 geographische LängenMeilen; folglich machen 27000 franz. QuadratMeilen 16200 geographische QuadratMeilen:

weil dieses voraussetzt, daß die Quadrate sich zu einander verhalten wie ihre Seiten: welches doch nicht ist, wie Jeder, auch ein NichtGeometer sich leicht überzeugen kan, wenn er sich die Mühe geben will, die Seiten eines Quadrats zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu vervierfachen ꝛc.: da er das Quadrat

drat selbst im ersten Fall 4 Mal, im zweiten 9 Mal, im dritten 16 Mal vergrößert finden wird. Versstosse dieser Art sind sehr gewöhnlich, auch sogar in Schriften, so daß man, ohne sonderliche Mühe eine artige Samlung davon veranstalten könte. Hier ist ein kleiner Anfang dazu, worin bloß von Vergleichung französischer und geographischer Quadrat-Meilen die Rede ist. Es werden nämlich, als gleichgeltend vorgenommen:

a) 27000 franz. u. 16200 geogr QuadratMeilen in Schlözers StaatsAnzeigen, Heft XLVI. S. 129

b) 30000 franz. und 18000 geogr. Q. Meilen in Crome's Europens Producte, Tafel zu S. 12.

c) 76 franz. und 42 geogr. QuadratMeilen in Mangelsdorfs Hausbedarf, T. I. S. 163.

d) 540 franz. und 340 geogr. QuadratMeilen in Fabri's Magazin, B. III.

Der Schlözersche Verstoß ist gerügt von G. A. von Winterfeld, im DecemberStück 1789 des politischen Journals; den bratringischen (d) aber habe ich in zwei Recensionen ungerügt nachgebetet gefunden.

Endlich drittens ist selbst im Handel der Preis nicht immer der Quantität der Waare proportionirt, obgleich mehre Autoren, wie Wolf, Eluer, Joh. Schulz ꝛc. es unvorsichtig behaupten. So würde z. B. folgende Rechnung unrichtig seyn:

Ein

Ein Diamant von 1 Karat gilt 50 Taler; folglich gilt einer von 5 Karat 50×5 Taler: indem der Preis des leztern nicht 50×5, sondern $50 \times 5^2 = 1250$ Taler ist. — Und ohngefähr gleiche Bewandniß hat es mit andern EdelSteinen, mit Perlen, mit Spiegeln, mit Mastbäumen, und mit andern Sachen mehr. (Man vergleiche hiermit Busse's Anleitung zum Gebrauch meines Rechenbuches §. 628 f. der zweiten Ausgabe).

§. 310.

In den RechenBüchern pflegt auch welsche Praktik gelehrt zu werden. Sie ist aber nichts anders als die Anbringung verschiedener Vorteile bei der Regel detri, wie §. 301 einer dahin gehörigen enthält. Wer mehr davon zu wissen wünscht, kan sich aus Busses gemeinverständlichem RechenBuche, und der Anleitung zum Gebrauch desselben, Rats erholen.

Von ZusammenSetzung der Verhältnisse.

§. 311.

L. Wenn von zwei Verhältnissen

$$a \,..\, b$$
$$c \,..\, d$$

die gleichnamigen, hier unter einander stehenden, Glieder durch einander multiplicirt werden; so heisst das Verhältniß der Producte

$$ac \,..\, bd$$

aus beiden Verhältnissen zusammen gesetzt.

Man

Man kan dieſes bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} a \,..\, b \\ c \,..\, d \end{pmatrix} = ac \,..\, bd;$$

Oder:

$$\frac{\begin{matrix} a \,..\, b \\ c \,..\, d \end{matrix}}{ac \,..\, bd}$$

Oder auch:

$$(a \,..\, b) + (c \,..\, d) = ac \,..\, bd$$

§. 312.

L. Zwei Verhältniſſe

wie a . . b

wie b . . c

wo das HinterGlied des einen gleich iſt dem Vorder-Gliede des andern zuſammen geſetzt, was gibt das?

S. $\begin{pmatrix} a..b \\ b..c \end{pmatrix} = ab..bc$ (§. 311) $= a..c$ (§. 274).

L. Und wenn man drei, oder mehr ſolcher Verhältniſſe,

$(a..b) + (b..c) + (c..d) + (d..e)$ ꝛc.

zuſammenſetzte,, ?

S. $\left\{\begin{matrix} a \,..\, b \\ b \,..\, c \\ c \,..\, d \\ d \,..\, e \end{matrix}\right\} = abcd..bcde = a..e$

L.

L. Also (a..b)+(b..c) = a..c
(a..b)+(b..c)+(c..d) = a..d
(a..b)+(b..c)+(c..d)+(d..e)=a..e
u. s. w.
welche Lehre kan man daraus ziehn?

S. Bei zwei oder mehr Verhältnissen, wo das Hinterglied des einen stets gleich ist dem VorderGliede des folgenden, ist das Verhältniß der beiden äussersten Glieder aus allen diesen Verhältnissen zusammengesetzt.

L. Recht! Und auf Gleichheit oder Ungleichheit der Verhältnisse kömt es dabei nicht an.

§. 313.

L. Um auch in Zahlen einen Begriff von dieser Verhältniß-ZusammenSetzung zu geben, nehmen wir an es verhalte sich
a zu b, wie 2 zu 3,
b zu c, wie 3 zu 4:
wie wird nun a zu c sich verhalten?

S. a . . b = 2 . . 3
b . . c = 3 . . 4
a . . c = 2 . . 4 (§. 312)
= 1 . . 2 (§. 274).

L.

L. Oder fragt Jemand, wie viel GuteGroschen auf einen Taler gehn? so kan ich geradezu antworten: 24 Groschen machen einen Taler: welches eben so viel ist, als:

Taler . . Groschen = 1 . . 24;

der Taler verhält sich zum Groschen, wie 1 zu 24. Oder ich kan auch durch einen Umweg antworten und sagen: 2 Taler machen 3 Gulden; und 1 Gulden hält 16 Groschen: — was folgt nun daraus weiter?

S. 2 Tl. = 3 Guld. = (3 × 16) Gr. = 48 Gr.

1 Tl. = $\frac{3}{2}$ Guld. = (3 × 8) Gr. = 24 Gr.

48 . . 2

L. Eben dieses wird kunstmässiger so gefunden:

T. . . G. = 3 . . 2

G. . . Gr. = 16 . . 1

T. . . Gr. = (3 × 16 . . (2 × 1)

= (3 × 8) . . 1 (§. 274) = 24 . . 1

L. Dieses ist die eigentliche KettenRechnung, oder Regel Multiplex, und die §. 307 versprochene Abkürzung derselben. Wir wollen, um das noch deutlicher zu zeigen, die dortigen Exempel nach dieser Art berechnen. Das erste war:

3 MarienGroschen = 2 GuteGroschen

24 GuteGroschen = 1 Taler;

11 Taler = 4 Ducaten;

die Frage ist: wie viel Mgr. gehn auf einen Ducaten?

Wie

Wie wird dieses Exempel, nach der Verhältniße Zusammensetzung zu stehn kommen?

S. Mgr. . . Ggr. = 2 . . 3
Ggr: . . Tl. = 1 . . 24
Tlr. . . Duc. = 4 . . 11

Mgr. . . Duc. = 8 . . 33×24
= 1 . . 33×3
= 1 . . 99

L. Das Verhältniß des Marien-Groschens zum Ducaten also ist wie 1 zu 99; oder (welches eben so viel sagt) auf einen Ducaten gehn 99 Marien-Groschen. — Nun das zweite Exempel:

1 Mark feines Gold = 288 Grän;
284 Grän f. Gold = 1 Mk. Ducaten-Gold;
1 Mk. Ducaten-Gold = 67 Ducaten;
1 Ducaten = 4 Gulden;
18 Gulden = 1 Mk. feines Silber:

welches ist das Verhältniß des feines Goldes zum feinen Silber?

S. Mk. f. ☉ .. Mk. D ☉ = 288 . . 284
Mk. D ☉ .. Duc. = 67 . . 1
Duc. .. Guld. = 4 . . 1
Gulden .. Mk. f. ☽ = 1 . . 18

Mk. f. ☉ . . Mk. f. ☽ = (288×67×4) . . (284×18)
= (288×67) . . (71×18)
= (16×67) . . 71
= 1072 . . 71

L.

L. Das Ausstreichen gleicher Factoren gegen einander, kan auch geschehn vor HerunterRükkung derselben:

288,16	. .	284,71
67	. .	1
4	. .	1
1	. .	18
16×67	. .	71

Die RechenMeister pflegen sich noch andre Abkürzungen zu erlauben, und so zu schreiben:

71,284 Mk f. ⊙ geben 288,16 Mk. # ⊙
1 Mk. # ⊙ gibt 67 # #
1 # gilt 4 Fl.
18 Fl. gehn auf 1 Mk f. D

71 Mk. f. ⊙ machen {16×67 / 1072} Mk. f D

welches mit dem vorigen auf eins hinausläuft. Die ganze Kunst besteht in Verfertigung des Ansatzes. Jeder Satz nämlich muß stets mit eben dem Namen anfangen, womit der unmittelbar vorhergehende endigte, und die beiden äussersten Glieder müssen die Dinge enthalten, deren Verhältniß zu einander man zu wissen begehrt; (hier des feinen Goldes zum feinen Silber).

Uebungs-

Uebungs-Exempel.

I.

21 5/13 Karat f. ☉ = 35 Friedrichsd'or
1 Friedrichsd'or = 5 Tlr. preuss. Currant
14 Tl pr. Curr. = 1 Mk. f. ☽
1 Mark = 24 Karat.

Welches ist (nach dieser Annahme des Münz-Meister Graumanns) das Verhältniß des feinen Goldes zum feinen Silber?

Antw. $\frac{(\frac{65}{3} \times 14)}{(65 \times 14)} = \frac{(35 \times 5 \times 24)}{(65 \times 5 \times 24 \times 3)}$

$\frac{(13 \times 7)}{13} = \frac{(35 \times 12 \times 3)}{(5 \times 12 \times 3)}$

$\frac{13}{13} = \frac{180}{180}$

1 Mk. f. ☉ = $13\frac{11}{13}$ Mk. f. ☽

Oder:

1 Mk. f. ☉ . . Mk. f. ☽ = $13\frac{11}{13}$ . . 1

II.

12 märk. Pfennige = 1 Guten-Groschen
8 Ggr. = 10 preuss. Dütchen
1 Dütchen = 3 preuss Groschen
1 preuss. Ggr. = 3 preuss. Schillinge

12×8 märk. Pf. = 10×9 pr. Schillinge

4×4 = 5×3

16 märk. Pf. = 15 preuss. Schillinge.

III.

III.

2 Rubel	=	95 holländische Stüber
20 holl. Stüber	=	1 holländ. Gulden
5 holl. Gulden	=	2 holl. BancoTaler
100 holl. BancoTl.	=	142 ReichsTaler
1 ReichsTaler	=	24 GuteGroschen

$$20 \times 5 \times 100 = 95 \times 142 \times 24$$

$$2000 = 19 \times 142 \times 24$$

$$1000 = 2698 \times 12$$

$$= 32376$$

1 Rubel $= 32 + \frac{376}{1000}$ Sgr.

$= 1$ Rtl. 8 Sgr. $4\frac{64}{125}$ pf.

IV.

1000 Rees (portug.)	=	67 Pence (englisch)
12 Pence	=	1 Shilling
20 Shilling	=	1 ℔ Sterling
1 ℔ Sterling	=	$6 + \frac{1}{4}$ ReichsTaler

$$1000 \times 12 \times 20 = 67 \times \frac{25}{4}$$

$$1000 \times 12 \times 80 = 67 \times 25$$

$$1000 \times 12 \times 16 = 67 \times 5$$

$$16000 \times 12 = 335$$

$$192000 = 335$$

$573\frac{45}{335}$ Rees $= 1$ Rtl.

§. 314.

L. Daß man auch gleiche Verhältnisse zusammen setzen könne, versteht sich von selbst. Hier ist es eigentlich nur um die Namen zu tuhn, welche man diesen auf solche Art zusammen gesetzten Verhältnissen gibt. So ist

$$\begin{pmatrix} a \,..\, b \\ a \,..\, b \end{pmatrix} = a^2 \,..\, b^2$$

und von $a^2 \,..\, b^2$ sagt man, es stehe gegen $a : b$ in verdoppeltem oder quadratischem Verhältnisse.

Es sei $p \,..\, q = m \,..\, n$
$q \,..\, s = m \,..\, n$

so ist $p \,..\, s = m^2 \,..\, n^2$

und folglich $p \,..\, s$ in quadratischem Verhältnisse gegen $m \,..\, n$, gegen $p \,..\, q$; und gegen $q \,..\, s$.

Dagegen steht $a^3 \,..\, b^3$ in verdreifachtem oder cubischem Verhältnisse gegen $a \,..\, b$. Ueberhaupt heissen höhere Verhältnisse die aus gleichen Verhältnissen zusammengesetzt sind, vervielfachte.

Man muß sich hüten verdoppelt, verdreifacht, vervielfacht, mit doppelt, dreifach, vielfach zu verwechseln, oder gleichbedeutend zu halten. 2 steht gegen 1 in doppeltem Verhältnisse. $2^2 \,..\, 1^2 = 4 \,..\, 1$ steht in verdoppeltem gegen $2 \,..\, 1$. Ueberhaupt steht a^n im n fachen Ver-

Verhältnisse zu 1; a^n . . b^n in ver n fachtem Verhältnisse zu a : b. Wäre nun a zwei oder drei Mal so groß als b, in welchem Verhältnisse würde denn a gegen b stehn?

S. In doppeltem, oder in dreifachem.

L. Das ist richtig. Um aber Mißverständen vorzubeugen, pflegt man dieses lieber so auszudrükken:

a . . b = 2 . . 1
und a . . b = 3 . . 1.

§. 315.

Mein Recensent in der Allgemeinen LiteraturZeitung (Jahrg. 1798, Nro. 10) macht hier die Bemerkung: „Ein verdoppeltes, verdreifachtes Verhältniß sagt niemand, und unser Verf. lehrt etwas Falsches, wenn er auf diesen Ausdrukk hindeutend sagt, 2 stehe gegen 1 in doppeltem, hingegen 4 gegen 1 in verdoppeltem Verhältnisse von 2 gegen 1. Das ist eine Unterscheidung die nur unser Verf., nicht andre Mathematiker, machen, die, wo sie von doppeltem, dreifachem, vielfachem Verhältnisse sprechen, stets das darunter verstehn, was unser Verf. verdoppelt, verdreifacht, vervielfacht genannt haben will."

Fast alle Geometer erinnern, daß man ratio *dupla* und *duplicata*, tripla und triplicata; überhaupt *multipla* und *multiplicata*, nicht verwechseln müsse. Man sehe unter Andern *Wolfii* element. arithm. §. 142; Käſtners Arithm. C. VI. §. 7; — Lorenz's Element.

Arithm. §. 422; — *Bélidor* nouveau cours de mathématique, §. 193; — *La Chapelle*, encyclopédie, art. *raison*; — *d'Alembert* encyclopédie, art. *double* *). Auch haben Käſtner und Karſten ſchon duplicata durch verdoppelt überſetzt; und nach dieſer Analogie glaubte ich triplicata, multiplicata etc. durch verdreifacht, vervielfacht überſetzen zu dürfen; obgleich ich hierin meines Wiſſens nach keinen Vorgänger habe. Lorenz, in der angeführten Stelle, unterſcheidet das Vielfache der Verhältniß von der vielfachen Verhältniß; in ſeinem Euklides dagegen ſchreibt er, für ratio triplicata, das Verhältniß iſt dreifach höher. Der Hofprediger Schulz hingegen braucht duplicirt, triplicirt (Anfangsgründe der reinen Matheſis, Arithm. §. 189). Die Mehreſten bedienen ſich der lateiniſchen Ausdrükke: dupla, duplicata; tripla, triplicata etc. Mein Rat iſt, ſich dieſe verſchiedene Ausdrükke bekant zu machen, ſich ſelbſt aber ihrer zu enthalten.

Von geometriſchen Reihen.

§. 316.

L. Es ſei das erſte Glied = a;
der Verhältnißnamen = n;
ſo iſt das zweite Glied = ?

S. $= \frac{a}{n}$ (§. 273).

S.

*) In der Vorrede zum dritten Teil dieſes Werks ſtehn dieſe Stellen wörtlich.

L. Und das dritte . . ?

S. $= \frac{a}{n^2}$ (§. 295).

L. Also die drei Glieder einer stetigen geometrischen Proportion sind:

$$\dot{\dot{\cdot}} \; a \; . \; . \; \frac{a}{n} \; . \; . \; \frac{a}{n^2};$$

Wie lassen sich die noch auf andre Art ausdrukken?

S. $a \; . \; . \; \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \; . \; . \; \frac{a}{n}$ (§. 295).

L. Aber welches würde zu diesen drei Gliedern

$$a, \frac{a}{n}, \frac{a}{n^2}$$

das vierte Glied seyn?

S. $a \; . \; . \; \frac{a}{n} = \frac{a}{n^2} \; . \; . \; \frac{a}{n^3}$ (§. 294).

L. Dis lässt sich auch so schreiben:

$$a \; . \; . \; \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \; . \; . \; \frac{a}{n} = \frac{a}{n^2} \; . \; . \; \frac{a}{n^3}$$

so daß jedes mitlere Glied zwei Stellen vertrit.

Oder kürzer:

$$\dot{\dot{\cdot}} \; a \; . \; . \; \frac{a}{n} \; . \; . \; \frac{a}{n^2} \; . \; . \; \frac{a}{n^3}$$

Liesse sich zu dieser Folge von Gliedern nicht auch ein fünftes, sechstes ꝛc. Glied angeben?

S. O ja. $a : \frac{a}{n} = \frac{a}{n^3} : \frac{a}{n^4}$

$$\cdot \; \cdot = \frac{a}{n^4} : \frac{a}{n^5}$$

$$\cdot \; \cdot = \frac{a}{n^5} : \frac{a}{n^6}$$

Der Exponent des Verhältnißnamens wächst immer um 1, und die Folge der Glieder ist:

$$\div\ a \,..\, \frac{a}{n} \,..\, \frac{a}{n^2} \,..\, \frac{a}{n^3} \,..\, \frac{a}{n^4} \,..\, \frac{a}{n^5} \,..\, \frac{a}{n^6} \,..\, \frac{a}{n^7}\ \text{&c.}$$

L. Gesetzt aber es würde, anstat des Verhältnißnamens n, der umgekehrte Verhältnißnamen u gegeben: welches würde dan die Folge der Glieder seyn?

S. Dan wäre sie:

$$a : au = au : au^2 = au^2 : au^3 = au^3 : au^4 = au^4 : au^5 \text{ &c.} \quad (\S.\ 280)$$

Oder: $\div\ a \,..\, au \,..\, au^2 \,..\, au^3 \,..\, au^4 \,..\, au^5$ &c.

L. Eine Folge von Zahlen nun, die in lauter zusammenhängenden geometrischen Verhältnissen fortschreitet,

wie $\div\ a \,..\, \frac{a}{n} \,..\, \frac{a}{n^2} \,..\, \frac{a}{n^3} \,..\, \frac{a}{n^4} \,..\, \frac{a}{n^5}$ &c.

oder $\div\ a : au : au^2 : au^3 : au^4 : au^5$ &c.

heisst eine geometrische Reihe oder Progression. Sie ist gegeben, oder kan gefunden werden, wenn das erste Glied a, nebst dem Verhältnißnamen n gegeben ist. Da aber der Verhältnißnamen auch durch Hülfe der beiden ersten Glieder gefunden wird (§. 273); so folgt daraus .. ?

S.

S. Daß auch die beiden ersten Glieder hinlänglich sind, die Progression zu finden.

L. Für $\div\div$ a : au : au² ꝛc.

kan man auch schreiben:

$\div\div$ au° : au¹ : au² (§. 163, 155).

Da nun die Exponenten immer um 1 wachsen, wie wir vorhin schon bemerkt haben; so bildet die Folge derselben

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ꝛc.

eine arithmetische Reihe (§. 261).

§. 317.

L. Entweder $n = 1$,
oder $n < 1$,
oder $n > 1$,

das heisst: der VerhältnißName ist entweder 1; oder ein ächter Bruch, oder ein unächter Bruch. Wie verhält sich nun u dagegen?

S. Ist $n = 1$, so ist auch $u = 1$;
ist $n < 1$, so ist $u > 1$;
ist $n > 1$, so ist $u < 1$ } (§. 280)

L. Wie werden aber die VerhältnißGlieder in jedem dieser Fälle beschaffen seyn? Wenn z. B. $n = 1$ wäre, würden sie dan wachsen? oder würden sie abnehmen?

S.

S. Ist $n = 1$, so ist auch $u = 1$ (§. 280) und nimt man nun auch $a = 1$ an, so ist die Reihe:

$$\div\div 1 \,.\, \tfrac{1}{1} \,.\, \tfrac{1}{1} \,.\, \tfrac{1}{1} \text{ ꝛc.}$$

oder $\div\div (1\times1) \,.\, (1\times1) \,.\, (1\times1)$ ꝛc.

und alles bleibt unverändert; das lezte Glied ist wie das erste.

L. Aber angenommen n sei ein ächter Bruch, etwan $\frac{1}{2}$?

S. So ist $u = \frac{2}{1}$ (§. 280) $= 2$

$$\div\div a \,.\, \tfrac{a}{n} \,.\, \tfrac{a}{n^2} \,.\, \tfrac{a}{n^3} \,.\, \tfrac{a}{n^4} \,.\, \tfrac{a}{n^5} \text{ ꝛc.}$$

$$= \div\div \,.\, \tfrac{1}{\frac{1}{2}} \,.\, \tfrac{1}{\frac{1}{4}} \,.\, \tfrac{1}{\frac{1}{8}} \,.\, \tfrac{1}{\frac{1}{16}} \,.\, \tfrac{1}{\frac{1}{32}} \text{ ꝛc.}$$

$$= \div\div 1 \,.\, (1\times2) \,.\, (1\times4) \,.\, (1\times8) \,.\, (1\times16) \,.\, (1\times32) \quad (\text{§. 112})$$

$$= \div\div a \,.\, au \,.\, au^2 \,.\, au^3 \,.\, au^4 \,.\, au^5$$

L. Ist also $n < 1$, oder $u > 1$, so wachsen die Glieder.

Es sei nun, umgekehrt, $n = 2 = \frac{2}{1}$ (§. 74)

S. So ist $u = \frac{1}{2}$ (§. 280);

und die Reihe wird $\div\div 1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{8} \,.\,$ ꝛc.

$$= \div\div 1 \,.\, 1\times\tfrac{1}{2} \,.\, (\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}) \,.\, (\tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2}) \,.\, (\tfrac{1}{8}\times\tfrac{1}{2})$$

L. Die Glieder nehmen folglich ab. — Eine geometrische Reihe, wo die folgenden Glieder

der zunehmen, heisst eine steigende, eine solche aber, wo sie abnehmen, eine fallende: und jede der obigen Formeln:

$\div\!\!\cdot$ a .. $\frac{a}{n}$ .. $\frac{a}{n^2}$ &c. sowol, als $\div\!\!\cdot$ a .. au .. au^2 &c.

ist gemeinschaftlicher Ausdrukk für beide. — Nachdem dis ausgemacht ist, wollen wir, so oft die Umstände es erlauben, die Reihe mit dem umgekehrten VerhältnißNamen brauchen, weil sie leichter zu schreiben ist als die andre.

§. 318.

L. Da $u = u^1$ (§. 155)
$1 = u^0$ (§. 163);
so läßt sich die Reihe $\div\!\!\cdot$ a .. au .. au^2 &c. auch so ausdrükken:

$\div\!\!\cdot$ au^0 .. au^1 .. au^2 .. au^3 .. au^4 .. au^5 .. au^6 .. au^7 &c.

Auch hier findet also Stat, was wir ehemals (§. 316) bemerkt haben; daß nämlich, der Exponent des VerhältnißNamens mit jedem neuen Gliede um 1 wächst. Schreibt man nun die Ordnungs-Zahlen unter die Glieder:

$\div\!\!\cdot$ au^0 .. au^1 .. au^2 .. au^3 .. au^4 .. au^5 .. au^6 .. au^7 &c.
O. Z. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
so ist wieder merkwürdig . . ?

S. Daß die OrdnungsZahl immer um 1 geringer ist, als der darüber stehende Exponent des VerhältnißNamens.

L. Diese Bemerkung ist keinesweges unnütz; denn sie kan dienen, jedes verlangte Glied einer geometrischen Reihe ausser der Ordnung anzugeben, wenn nämlich das erste Glied a, und der VerhältnißNamen n, oder der umgekehrte VerhältnißNamen u bekant sind. So würde z. B. das 15te Glied obiger Reihe seyn . . ?

S. $au^{15-1} = au^{14}$

L. Ueberhaupt ist das Glied einer unbestimmten Ordnung $m = au^{m-1} = v$

Exempel.

Es sei $a = 1$; $u = 2$; $m = 65$;
so ist das Glied der Ordnung $m = 1 \times 2^{65-1} = 2^{64} = v$

Ausrechnung.

$2^2 \times 2^3 = 2^5$ (§. 161) $= 4 \times 8 = 32$
$2^5 \times 2^5 = 2^{10} = 32 \times 32 = 1024$
$2^{10} \times 2^{10} = 2^{20} = 1024 \times 1024 = 1048576$
$2^{20} \times 2^{20} = 2^{40} = 1048576 \times 1048576$
$= 1099511627776$
$2^{40} \times 2^{20} = 2^{60} = 1099511627776 \times 1048576$
$= 1152921504606846976$
$2^{60} \times 2^4 = 2^{64} = 1152921504606846976 \times 16$
$= 18,446744,073709,551616$

§. 319.

L. Nun müssen wir auch geometrische Reihen summiren lernen. Den ersten Versuch wollen wir mit der allereinfachsten machen, die nämlich von 1 anfängt, und 2 zum VerhältnißNamen hat.

$\div$ 1 . . 2 . . 4 . . 8 . . 16

diese summirt würde geben:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = S$$

Wie wird nun S, oder die Summe auf die kürzeste Art gefunden? — Wir wollen, um es zu entdekken, die Reihe durch ihren umgekehrten VerhältnißNamen $u = 2$, multipliciren.

$$S. \quad (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times 2 = S \times u$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 2S$$

L. Nimt man nun von der Reihe 2 S die Reihe S wieder weg, so bleibt S.

S. Von $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 2S$
subtrahirt $+ 2 + 4 + 8 + 16 + 1 = S$
bleibt $32 - 1 = S$

L. Wir wollen das erste Glied $= 3$ annehmen; u mag 2 bleiben.

S. $3 + 6 + 12 + 24 = S$
$6 + 12 + 24 + 48 = Su = 2S$
$48 - 3 = S$

L.

L. Es sei das erste Glied = a, das lezte = v; so ist S = ?

S. vu — a = S = 2v — a.

§. 320.

L. Wir müssen weiter gehn, und auch Reihen summiren lernen, die grössere umgekehrte VerhältnißNamen haben als 2. Zuerst eine Reihe wo u = 3!

S. $1+3+9+27+81=S$

$3+9+27+81+243=Su=3S$

$243-1=Su-S=2S=vu-a$

$\frac{243-1}{2}=S=\frac{vu-a}{2}$

L. Nun eine Reihe, deren Namen = 4!

S. $1+4+16+64=S$

$4+16+64+256=Su=4S$

$256-1=Su-S=3S=vu-a$

$\frac{256-1}{3}=S=\frac{uv-a}{3}$

L. Nun eine Reihe wo u = 5!

S. $1+5+25+125=S$

$5+25+125+625=Su=5S$

$625-1=Su-S=4S=vu-a$

$\frac{625-1}{4}=S=\frac{vu-a}{4}$

§. 321.

§. 321.

L. Nun wollen wir recapituliren, und zwar von hinten anfangen:

S. Ist $u = 5$, so ist $S = \frac{vu-a}{4}$

" $u = 4$, " " $S = \frac{vu-a}{3}$

" $u = 3$, " " $S = \frac{vu-a}{2}$

" $u = 2$, " " $S = \frac{vu-a}{1} = vu-a$

L. Wie aber, wenn $u = 6$ wäre?

S. Ist $u = 6$, so ist $S = \frac{vu-a}{5}$

Der Dividendus ist immer um 1 geringer als u.

L. Aus den bisherigen Inductionen folgt das zwar; aber läßt es sich auch auf andre Art beweisen, daß es so seyn muß?

S. Wir wollen, anstat der Zahlen, Buchstaben nehmen.

$$a + au + au^2 + au^3 = S$$

$$au + au^2 + au^3 + au^4 = Su$$

$$au^4 - a = Su - S = (u-1)S = vu-a$$

$$S = \frac{vu-a}{u-1}$$

L. Der Beweis ist richtig. Die Formel $S = \frac{vu-a}{u-1}$ enthält zugleich die allgemeine Regel für die Summirung geometrischer Reihen. Welches ist sie?

S. 1) Man multiplicirt das lezte Glied durch den umgekehrten VerhältnißNamen: vu

2)

2) Von dem Producte wird das erste Glied abgezogen: vu - a.

3) Der Ueberrest wird durch den um 1 verminderten umgekehrten Namen dividirt: $\frac{vu-a}{u-1} = S$

§. 322.

Die eigentliche Anwendung dieser Rechnung gehört in die Arithmetik des Unendlichen. Hier können wir sie nur in spashaften, oder VexirExempeln zeigen. Ich wähle dazu zwei der bekantesten:

I. Der seiner außerordentlichen Leibesstärke, oder seiner mechanischen Geschiklichkeit wegen, berühmte Many, Joh. Karl von Ekkenberg, hatte sich verlaufen lassen, zu Leipzig, unterm 17. Oct. 1717 an den Lieutenant Johann Henr. Beyer, einen Wechsel auszustellen, durch welchen er sich verbindlich machte, für ein erhaltenes Pferd zu bezahlen, in der ersten Stunde 1 Pfennig, in der zweiten 2 Pfennige, in der dritten 4; u. s. f. in jeder nächstfolgenden Stunde doppelt so viel als in der vorhergehenden, und das 24 Stunden lang. Die Frage ist: wie teuer war das Pferd?

Ausrechnung.

1) $a = 1$; $u = 2$; $m = 24$;

$v = au^{m-1}$ (§. 318) $= 2^{23}$

$S = \frac{vu-a}{u-1}$ (§. 321) $= \frac{(2^{23} \times 2)-1}{2-1} = 2^{24}-1$

2) $2^{24} - 1 = (2^{20} \times 2^4) - 1 = 1048576 \times 16$
(§. 318) $= 16,777216 - 1 = 16,777215$ pf.

3) 16,777215 pf. = 58254 Tl. 5 Sgr. 3 pf.

Zur Geschichte dieser Aufgabe gehört noch, daß es zum Processe kam; daß ein verpflichteter Rechen-Meister den Auftrag erhielt, den Preis zu berechnen, und daß der Wechsel für ungültig erklärt ward. Es ist klar, daß der Lieut. Beyer mit dem starken Mann etwas mehr als Spaß treiben wolte. (Kästner's Forts. der RechenK. S. 62)

II. Nach dem Berichte morgenländischer Schriftsteller foderte der Indier Sissa, oder Sessa-EbnDahor, wie Andre ihn nennen, als Belohnung für die Erfindung des SchachSpiels, daß ihm die 64 Fächer des SchachBrettes möchten belegt werden: das erste mit einem WeizenKorne, das zweite mit 2, das dritte mit 4 WeizenKörnern u. s. f. Der König ward ungehalten über diese ihm so geringscheinende Foderung; als aber Sessa darauf bestand, befahl er, sie ihm auszuzahlen; und erstaunte sehr, als er vernahm, daß alles Getreide Indiens, und alle Schätze des Königs nicht reichten, Sessa's Foderung zu befriedigen! Aus-

meine weitere Ausführung nachlesung, sagt Lorenz Gerundet
2 1/2 Centner 1 1/2 Gran Weiz 176.

Ausrechnung.

1) $a = 1$, $u = 2$, $m = 64$;
folglich $v = au^{m-1} = 2^{63}$
und $S = \frac{vu-a}{u-1} = \frac{(2^{63} \times 2)-1}{2-1} = 2^{64}-1$
$= 18,446744,073709,551615$ (§. 270).

Da nun, nach einem ohngefähren Ueberschlage, 69000 Körner auf eine berliner Metze, folglich $69000 \times 16 = 1104000$ auf einen berliner Scheffel gehn; so beträgt diese ungeheure Körner-Zahl 16,709007,313143 berliner Scheffel, welche aufgeschüttet einen Raum von ohngefähr drittehalb Meilen in die Länge, eine Meile in die Breite, und eine Meile in die Höhe, füllen würden. Wolte man sie aber zu Gelde, nach einem MittelPreise, den Scheffel zu anderthalb Taler, rechnen; so würde die ganze Summe 23,3168 45,164951 Taler betragen. Gesetzt nun es wären hundert Könige auf dem Erdboden, und jeder brächte hundert Millionen auf; so machten das erst $100 \times 100,000000 = 10000,000000$ Taler, welches noch bei weitem nicht an obige Summe reicht. Und gesetzt auch, man nähme tausend Könige an, und liesse jeden tausend Millionen bezahlen, so wäre das erst $1000 \times 1000,000000 = 1,000000,000000$ Taler, noch nicht der drei und zwanzigste Teil der Summe. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß sie aufzubringen alle Könige der Erde zusammen schwerlich im Stande seyn möchten.

Arith-

Arithmetik.

Siebentes Buch.

Von den Logarithmen.

Eigenschaften, Verfertigung, und Gebrauch der Logarithmen, §. 323. f.

Bruchlogarithmen, §. 353.

Von Logarithmen.

§. 323.

L. Hier ist eine geometrische Reihe:

$\therefore a \,..\, au \,..\, au^2 \,..\, au^3 \,..\, au^4 \,..\, au^5 \,..\, au^6$ ꝛc. (§. 316)

Es sei $a = 1$, wie wird dan diese Reihe aussehn?

S. $1 \,..\, u \,..\, u^2 \,..\, u^3 \,..\, u^4 \,..\, u^5 \,..\, u^6$ ꝛc.

L. Und da $u^0 = 1$ (§. 163) und $u = u^1$ (§. 155); so lässt sich eben diese Reihe auch ausdrükken:

$u^0 \,..\, u^1 \,..\, u^2 \,..\, u^3 \,..\, u^4 \,..\, u^5 \,..\, u^6$ ꝛc.

Setzt man nun unter jedes Glied einer solchen Reihe R seinen Exponenten:

R	u^0	u^1	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6	u^7
L	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,

so heisst jede Zahl der Reihe L der Logarithme der über ihr stehenden in R. — Zu Bezeich-

zeichnung eines Logarithmen wollen wir uns des griechischen Buchstabens λ (lambda) bedienen. Z. B.

$$\lambda\ u^e = e$$

würde bedeuten » = ?

S. Der Logarithme von u^e ist e.

§. 324.

L. Also $\lambda\, u^e = e$ (§. 323)
wenn nun $u^e = b$
Welches ist dan der Logarithme von b?

S. Da $b = u^e$;
so ist auch $\lambda\, b = \lambda\, u^e = e$.

L Von u^e also ist e der Logarithme und der Exponent: aber auch von b?

S. Der Logarithme wol, aber nicht der Exponent. Der Exponent von b ist 1 (§. 155).

L. Hieraus erhellt also, daß Exponent und Logarithme nicht gleichbedeutende Dinge sind. Nur dan sind beide einander gleich, wenn alle Glieder einer geometrischen Reihe als Potenzen einer und derselben Grösse angedeutet werden, wie z. B. in

$$\left.\begin{array}{l} u^0 \,..\, u^1 \,..\, u^2 \,..\, u^3 \,..\, u^4 \,..\, u^5 \\ \text{oder in } 2^0 \,..\, 2^1 \,..\, 2^2 \,..\, 2^3 \,..\, 2^4 \,..\, 2^5 \\ 3^0 \,..\, 3^1 \,..\, 3^2 \,..\, 3^3 \,..\, 3^4 \,..\, 3^5 \\ 4^0 \,..\, 4^1 \,..\, 4^2 \,..\, 4^3 \,..\, 4^4 \,..\, 4^5 \\ 5^0 \,..\, 5^1 \,..\, 5^2 \,..\, 5^3 \,..\, 5^4 \,..\, 5^5 \end{array}\right\} \text{ &c.}$$

§. 325.

§. 325.

L. $\lambda u^0 = 0$ (§. 323). Aber der Wert von u^0 ist unveränderlich 1, man mag für u auch annehmen was man wil (§. 163). Daraus also folgt, daß der Logarithme von 1 unabänderlich 0 ist. — Aber wie ist es mit andern Zahlen? Haben die auch ihre bestimmte und unveränderliche Logarithmen, so wie 1?

S. Nein. Da u^1 unzählige Bedeutungen haben kan, so ist der Logarithme 1 an keine bestimmte Zahl geheftet, sondern kan dieser oder jener gehören, je nachdem der Wert von u bestimmt wird. Und eben so veränderlich sind die den übrigen Logarithmen entsprechende Zahlen. Es sei z. B. $u = 2$; so gibt das:

R	1	2	4	8	16	32	64 ꝛc.
L	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6

Nimt man aber $u = 3$, so erhält man:

R	1	3	9	27	81	243 ꝛc.
L	0,	1,	2,	3,	4,	5

u. s. f.

L. Was also zu den Logarithmen für Zahlen gehören, ist bestimmt, so bald u^1, oder die Zahl, welche 1 zum Logarithmen hat, festgesetzt ist. Und eine solche Bestimmung, wodurch eine arithmetische Reihe L

mit einer geometrischen R verbunden wird, heisst ein logarithmisches System: die Zahl aber, deren Logarithme 1 ist, heisst die Grund-Zahl des Systems.

§. 326.

L. Setzt man unter eine Reihe R ihre Logarithmen L:

R	u^0 . .	u^1 . .	u^2 . .	u^3 . .	u^4 . . u^5 u. s. w.
L	o	1	2	3	4 5

so bemerkt man, daß lezte die Zahl der Verhältnisse in erster bezeichnen. Das erste Glied u^0 macht noch kein Verhältniß, weil zu einem Verhältnisse zwei Glieder erfodert werden (§. 268) und daher ist der Logarithme dieses ersten Gliedes o. Unter dem zweiten Gliede dagegen steht der Logarithmus 1, unter dem dritten 2, unter dem vierten 3 u. s. w. Denn $u^0 \,..\, u^1$ ist ein Verhältniß; $u^0 \,..\, u^1 \,..\, u^2$ sind zwei Verhältnisse; $u^0 \,..\, u^1 \,..\, u^2 \,..\, u^3$ sind drei Verhältnisse u. s. w. Dieses hat den Namen Logarithmus veranlasst, der aus den griechischen Wörtern αριθμος und λογος zusammengesetzt ist, und Verhältnißzahl bedeutet.

Noch eine andre Eigenschaft der Logarithmen ist, daß sie auch anzeigen, aus wie viel Verhältnissen das Verhältniß des über ihnen stehenden Gliedes zum ersten Gliede zusammengesetzt ist. So ist z. B.

$u^0 \,..\, u^1 = 1 \,..\, u$ ein einfaches
$u^0 \,..\, u^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & . & . & u \\ 1 & . & . & u \end{smallmatrix}\right)$ ein verdoppeltes
$u^0 \,..\, u^3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & . & . & u \\ 1 & . & . & u \\ 1 & . & . & u \end{smallmatrix}\right)$ ein verdreifachtes
} Verhältniß (§. 314).

u. s. w.

Auf diese Eigenschaft gründen einige Geometer die ganze Logarithmenlehre.

§. 327.

L. Eine geometrische Reihe, deren GrundZahl (§. 325) 5 seyn mag, wollen wir zuerst mit ihren Exponenten, dan ohne Exponenten schreiben, und zulezt ihre Logarithmen darunter setzen.

S. R 5^0 .. 5^1 .. 5^2 .. 5^3 .. 5^4 .. 5^5 .. 5^6 .. 5^7 .. 5^8
= 1 .. 5 .. 25 .. 125 .. 625 .. 3125 .. 15625 .. 78125 .. 390625
Lo. 1 2 3 4 5 6 7 8

L. Wenn nun aus obiger Reihe zwei Glieder zu multipliciren sind, z. B. 125×3125, wie geschieht das am kürzesten?

S. $125 \times 3125 = 5^3 \times 5^5 = 5^{3+5}$ (§. 160) $= 5^8 = 390625$.

L. Aber gesetzt 390625 solte durch 125 dividirt werden?

S. $390625 : 125 = 5^8 : 5^3 = 5^{8-3}$ (§. 162) $= 5^5 = 3125$.

L. Da nun hier die Logarithmen L, den Exponenten gleich sind (§. 324), so lassen sich eben diese Operationen auch durch die Logarithmen verrichten.

S. a) $125 \times 3125 = \lambda 125 + \lambda 3125 =$
$3 + 5 = 8 = \lambda 390625.$

b) $390625 : 125 = \lambda 390625 - \lambda 125 =$
$8 - 3 = 5 = \lambda 3125.$

L. Allgemeine Formeln für dieses Verfahren sind:

$$\lambda u^m + \lambda u^n = \lambda (u^m \times u^n)$$

$$\lambda u^m - \lambda u^n = \lambda (u^m : u^n)$$

Diese Formeln in Worte gekleidet, lauten = ?

S. Der Logarithme eines Products ist die Summe der Logarithmen der Factoren; und der Logarithme eines Quotiente ist der Ueberschuß des Dividendus Logarithmen über den Logarithmen des Divisors.

§. 328.

L. $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3}$ (§. 161)

und $\sqrt[3]{5^6} = 5^{6:3}$ (§. 177)

Diese Exempel können uns lehren, durch Hülfe der Logarithmen zu höhern Potenzen zu erheben, und Wurzeln auszuziehn. Es soll z. B. 25 zur dritten Potenz erhoben werden?

S. $25^3 = \lambda 25 \times 3 = 2 \times 3 = 6 =$
15625.

L.

L. Und aus 15625 die CubicWurzel?

S. $\sqrt[3]{15625} = \lambda\, 15625 : 3 = 6 : 3 = 2$
$= \lambda\, 25.$

L. Allgemeine Formeln für dieses Verfahren sind:

$$\lambda\,(u^n)^m = \lambda\, u^n \times m$$
$$\lambda \sqrt[n]{u^m} = \lambda\, u^m : n$$

Das heisst?

S. Den Logarithmen einer Potenz zu finden, multiplicirt man den Logarithmen der Wurzel durch die Zahl des Grades der Potenz; und den Logarithmen einer Wurzel zu finden, dividirt man den Logarithmen der Potenz durch den WurzelExponenten.

§. 329.

L. Der Gebrauch der Logarithmen also verwandelt

das Multipliciren in Addiren,
das Dividiren in Subtrahiren, } (§. 327)

das Erheben zu Potenzen in einfaches Multipliciren,
und das WurzelAusziehn in Dividiren; } (§. 328)

woraus

woraus der grosse Nutzen derselben, vornehmlich bei Rechnungen mit grossen Zahlen, erhellt. Denn es ist offenbar leichter durch 3, durch 4, durch 5 ꝛc. zu dividiren, als die Wurzel des dritten, vierten fünften ꝛc. Grades auszuziehn. Nur eine Schwirigkeit trit in den Weg Man betrachte nur die Reihe, welche den kleinsten Exponenten in ganzen Zahlen 2, und folglich zwischen ihren Gliedern die kleinsten Lükken hat.

∴ 1..2..4..8..16..32..64..128..256..512..1024 ꝛc.

Zwischen 1 und 1024 enthält sie nur neun Glieder; und alle dazwischen fallende Zahlen, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 ꝛc. fehlen, und man hat daher keine Logarithmen für sie. Diese Schwirigkeit würde den Nutzen der Logarithmen sehr einschränken, wenn sie unübersteiglich wäre. — Solte sie das wirklich seyn? Was denkt ihr davon?

S. . . . . .

§. 330.

L. Um Versuche anzustellen, wollen wir ein logarithmisches System annehmen, was 10 zur GrundZahl hat (§. 325) und so aussiht:

R 10^0 .. 10^1 .. 10^2 .. 10^3 .. 10^4 ꝛc.

= 1 .. 10 .. 100 .. 1000 .. 10000

L 0 1 2 3 4

Hier

Hier fehlen gleich zwischen den beiden ersten Gliedern die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wie werden wir für diese Logarithmen, oder Exponenten [denn beide sind hier gleich (§ 324)] ausfindig machen?

S. Man muß zwischen 10^0 und 10^1 10 mit einem gebrochenen Exponenten, etwan $10^{\frac{1}{2}}$ einschieben.

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ (§. 177) $= 3{,}16227760..$ (§. 240)

folgl. $\lambda\ 3{,}16227760.. = \frac{1}{2}$ (§. 324) $= 0{,}5$ (§. 233)

L. Das Verfahren ist zwar richtig; aber die Zahl 3,1622.. ist gröſſer als 3, und kleiner als 4.

S. Ich muß noch ein Mal die Wurzel ausziehn; vielleicht gibt das 2, oder doch beinahe 2.

$$\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{\frac{1}{4}} = 1{,}7782794...$$

$$\lambda\ 1{,}7782794... = \tfrac{1}{4} = 0{,}25$$

L. Aber nun ist es aus; denn 1,778.. ist schon kleiner als 2.

S. Nun weis ich weiter keinen Rat.

L. Könten nicht die Producte dieser Wurzeln ganze, oder beinahe ganze Zahlen geben?

S. Das Lezte unfehlbar: vielleicht auch das Erste.

L. Es werden aber, um die Zal 2, bis auf sieben DecimalStellen, rein zu erhalten, 26 bis

27 Wur-

27 Wurzeln, von acht DecimalStellen erfodert. Vor der Arbeit brauchen wir nicht zu erschrekken; denn sie ist nicht so ungeheuer als sie beim ersten Anblikke scheint; und ist eine gute Uebung im WurzelAusziehn.

S. Tafel der QuadratWurzeln, und ihrer Logarithmen:

10 = A	λ A = 1,
√A = 3,16227760 = B	λ B = 0,5 = λ A : 2
√B = 1,77827941 = C	λ C = 0,25
√C = 1,33352143 = D	λ D = 0,125
√D = 1,15478198 = E	λ E = 0,0625
√E = 1,07460790 = F	λ F = 0,03125
√F = 1,03663296 = G	λ G = 0,015625
√G = 1,01815174 = H	λ H = 0,0078125
√H = 1,00903505 = I	λ I = 0,00390625
√I = 1,00450737 = K	λ K = 0,00195312
√K = 1,00225115 = L	λ L = 0,00097656
√L = 1,00112494 = M	λ M = 0,00048828
√M = 1,00056234 = N	λ N = 0,00024414
√N = 1,00028113 = O	λ O = 0,00012207
√O = 1,00014056 = P	λ P = 0,00006104
√P = 1,00007027 = Q	λ Q = 0,00003052
√Q = 1,00003514 = R	λ R = 0,00001526
√R = 1,00001757 = S	λ S = 0,00000763
√S = 1,00000878 = T	λ T = 0,00000381
√T = 1,00000439 = U	λ U = 0,00000191

√U

$\sqrt{U} = 1{,}00000219 = V$	$\lambda\ V = 0{,}00000095$
$\sqrt{V} = 1{,}00000110 = W$	$\lambda\ W = 0{,}00000048$
$\sqrt{W} = 1{,}00000055 = X$	$\lambda\ X = 0{,}00000024$
$\sqrt{X} = 1{,}00000028 = Y$	$\lambda\ Y = 0{,}00000012$
$\sqrt{Y} = 1{,}00000014 = Z$	$\lambda\ Z = 0{,}00000006$
$\sqrt{Z} = 1{,}00000007 = \mathfrak{A}$	$\lambda\ \mathfrak{A} = 0{,}00000003$
$\sqrt{\mathfrak{A}} = 1{,}00000003 = \mathfrak{B}$	$\lambda\ \mathfrak{B} = 0{,}00000002$
$\sqrt{\mathfrak{B}} = 1{,}00000001 = \mathfrak{C}$	$\lambda\ \mathfrak{C} = 0{,}00000001$

§. 331.

K. Nun können wir zur Multiplication schreiten. Da wir die Zahl 2 suchen, so müssen wir die Factoren so wählen, daß ihr Product der 2 so nahe als möglich kömt, ohne sie zu übersteigen. Was für Factoren werden wir also zuerst nehmen? Zum Versuche sind die drei nächsten Ziffern jedes Factors hinlänglich, die uns gleich zeigen werden, ob das Product grösser oder kleiner als 2 wird.

S. $CD = 1{,}77 :: \times 1{,}33 :: = 2{,}35 :: > 2$

$CE = 1{,}77 :: \times 1{,}15 :: = 2{,}035 :: > 2$

Diese Producte sind also beide nicht brauchbar.

$CF = 1{,}77827941 \times 1{,}07460790 =$

$1{,}91095310239333390 = a$

L. Das ist richtig: Wir brauchen aber nur die acht ersten DecimalZiffern: 1,9109 5310. Welches ist aber der Logarithme dieser Zahl?

S. $\lambda CF = \lambda C + \lambda F$ (§. ~~279~~ 329) $= 0{,}25 +$ $0{,}03125$ (§. 282) $= 0{,}28125$.

L. Da die Zahl 1,9109 ... die Zahl 2 noch nicht erreicht, so müssen wir die Multiplication fortsetzen, so lange bis wir 2,00000000, oder 1,99999999 erhalten.

S. Tafel der Producte, nebst ihren Logarithmen.

$CF = 1{,}91095310 = a$	$\lambda a = \lambda C + \lambda F = 0{,}28125$
$aG = 1{,}98095697 = b$	$\lambda b = \lambda d + \lambda G = 0{,}296875$
$bI = 1{,}99885501 = c$	$\lambda c = 0{,}30078125$
$cN = 1{,}99997905 = d$	$\lambda d = 0{,}30102539$
$dT = 1{,}99999561 = e$	$\lambda e = 0{,}30102920$
$cW = 1{,}99995881 = f$	$\lambda f = 0{,}30102968$
$fX = 1{,}99999991 = g$	$\lambda g = 0{,}30102992$
$gb = 1{,}99999997 = h$	$\lambda h = 0{,}30102994$
$hc = 2{,}00000000 = i$	$\lambda i = 0{,}30102996$

L. Nun sind wir so weit als zu unserm Zwecke nöthig ist. Bei genauerer Berechnung findet man den Logarithmen von $2 = 0{,}30102999563981 \ldots$ Gewöhnlich aber begnügt man sich mit sieben DecimalZiffern. Läßt man daher die achte weg, so muß man, da sie grösser als 5 ist, die vorhergehende um

$10^{0{,}30102999563981\ldots} = 2$.

um 1 vermehren, und dan erhält man für den Logarithmen von 2 = = ?

S. $\lambda 2 = 0{,}30103000$.

L. Der aber um ein Geringes, welches noch nicht die Hälfte von $\frac{1}{100000000}$ beträgt, zu groß ist.

§. 332.

L. Auf eben die Art, wie der Logarithmus von 2, lassen sich auch alle übrige noch fehlende Logarithmen finden. Ehe wir aber diese mühsame Arbeit unternehmen, müssen wir erst untersuchen, ob sie auch nötig ist? Ob wir nicht durch Hülfe schon bekanter Logarithmen andre noch unbekante auf eine leichtere und kürzere Art herausbringen können?

(Hier kan der Lehrling auf §. 327 und 328 verwiesen werden, wenn er nicht von selbst darauf verfält).

S. $\lambda 2^2 = \lambda 4 = \lambda 2 \times 2 = 0{,}30103000 \times 2$
$= 0{,}60206000$
$\lambda 2^3 = \lambda 8 = \lambda 2 \times 3 = 0{,}90309000$
$\lambda 2^4 = \lambda 16 = \lambda 2 \times 4 = 1{,}20412000$
$\lambda 2^5 = \lambda 32 = \lambda 2 \times 5 = 1{,}50515000$
u. s. w.

Fer-

Ferner $\lambda(10:2) = \lambda 5 = \lambda 10 - \lambda 2 = 0{,}6989700$

und $\lambda\ 5^2 = \lambda\ 25 = \lambda\ 5 \times 2 = 1{,}3979400$

$\lambda\ 5^3 = \lambda\ 125 = \lambda\ 5 \times 3 = 2{,}0969100$

$\lambda\ 5^4 = \lambda\ 625 = \lambda\ 5 \times 4 = 2{,}7958800$

u. s. w.

Fern. $\lambda(2 \times 10) = \lambda 20 = \lambda 2 + \lambda 10 = 1{,}3010300$

$\lambda(4 \times 10) = \lambda 40 = \lambda 4 + \lambda 10 = 1{,}6020600$

$\lambda(5 \times 10) = \lambda 50 = \lambda 5 + \lambda 10 = 1{,}6989700$

$\lambda(8 \times 10) = \lambda 80 = \lambda 8 + \lambda 10 = 1{,}9030900$

u. s. w.

F. $\lambda(2 \times 100) = \lambda 200 = \lambda 2 + \lambda 100 = 2{,}3010300$

$\lambda(4 \times 100) = \lambda 400 = \lambda 4 + \lambda 100 = 2{,}6020600$

$\lambda(5 \times 100) = \lambda 500 = \lambda 5 + \lambda 100 = 2{,}6989700$

u. s. w.

§. 333.

L. Zwischen 1 und 10 haben wir nun schon die Logarithmen von 2, von 4, von 5 und von 8; es fehlen uns also noch . . ?

S. Die von 3, von 6, von 7, und von 9.

L. Es ist ziemlich gleichgültig welchen der fehlenden wir zuerst suchen. Wir mögen aber suchen welchen wir wollen, so wird er uns nicht halb so viel

viel Mühe kosten, als der vorige, weil die WurzelTafel (§. 330) schon fertig ist; die wir noch überdis, durch die neugefundenen Zahlen 8, 5, 4, 2, und ihre Logarithmen, vermehren können. Die Tafel sieht alsdan so aus:

A = 10,00000000	λ A = 1,00000000
k = 8,00000000	λ k = 0,90308999 *)
l = 5,00000000	λ l = 0,69897000
m = 4,00000000	λ m = 0,60205999
B = 3,16227760	λ B = 0,50000000
n = 2,00000000	λ n = 0,30103000
C = 1,77827941	λ C = 0,25000000

Alles Uebrige bleibt wie in §. 330.

§. 334.

L. Hat man den Logarithmen von 3, so hat man auch den von 9 und von 6; und umgekehrt, hat man den von 9, so hat man auch den von 3 und von 6, weil

$$\lambda 3 \times 2 = \lambda 9 \text{ (§. 328)}$$
$$\lambda 3 + \lambda 2 = \lambda 6 \text{ (§. 327)}$$
$$\lambda 9 : 2 = \lambda 3 \text{ (§. 328)}$$
$$\lambda 6 - \lambda 2 = \lambda 3 \text{ (§. 327)}$$

Bei

*) Hier ist Rükksicht darauf genommen, daß λ 2 eigentlich 0,301029995 . . . sein solte (§. 331), welches λ 8 = λ 2 × 3 = 0,90308999869 gibt. Ein gleiches gilt von λ 4.

Bei Entscheidung der Frage: welcher von den dreien zuerst zu suchen sei? komt es also bloß darauf an, welcher am leichtesten zu finden ist, und das scheint der von 9 zu seyn, weil 1,77827941 × 5 = 8,89139705, welche Zahl der Zahl 9 schon sehr nahe kömt. Wir wollen also dabei bleiben.

S. ProductenTafel zu Berechnung des Logarithmen von 9.

1 C = 8,89139705 = o	λ r = 0,94897000
o I = 8,97173106 = p	λ p = 0,95287625
p L = 8,99192777 = q	λ q = 0,95385281
q N = 8,99698429 = r	λ r = 0,95409695
r O = 8,99951361 = s	λ s = 0,95421902
s R = 8,99982985 = t	λ t = 0,95423428
t S = 8,99998797 = u	λ u = 0,85424192
u V = 8,99999768 = v	λ v = 0,95424239
v Y = 8,99999913 = x	λ x = 0,95424245
x Z = 8,99999992 = y	λ y = 0,95424248
y b = 9,00000000 = z	λ z = 0,95424250

§. 335.

L. Die Logarithmen, welche durch den von 9 gefunden werden, sind = ?

S.

S. $\lambda 9 : 2 = \lambda 3 = 0{,}47712125\ldots$
$\lambda 3 + \lambda 2 = \lambda 6 = 0{,}7781512$
$\lambda 4 + \lambda 3 = \lambda 12 = 1{,}0791812$
$\lambda 5 + \lambda 3 = \lambda 15 = 1{,}1760913$
$\lambda 6 + \lambda 3 = \lambda 18 = 1{,}2552725$
$\lambda 8 + \lambda 3 = \lambda 24 = 1{,}3802112$
$\lambda 9 + \lambda 3 = \lambda 27 = 1{,}4313638$
$\lambda 10 + \lambda 3 = \lambda 30 = 1{,}4771212$
$\lambda 12 + \lambda 3 = \lambda 36 = 1{,}5563025$

Die folgenden wollen wir nur kurz angeben:
$\lambda 45, \lambda 48, \lambda 54, \lambda 60, \lambda 72, \lambda 75, \lambda 81, \lambda 90, \lambda 96, \lambda 108$ ꝛc.
Man braucht um dieses Verzeichniß fortzusetzen, nur alle Zahlen, deren Logarithmen schon bekant sind, durch 3 zu multipliciren.

§. 336.

L. Wir haben also die Logarithmen von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 31 ꝛc. Welche fehlen uns nun noch?

S. Die von 7, 11, 13, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 31, 33 ꝛc.

L. Wie sie zu finden sind, wissen wir; sie aber wirklich zu suchen, wäre unnütze Mühe, weil Andre die Arbeit schon übernommen, und Tafeln verfer-

tigt haben, welche die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis über 100000 hinaus, nach dem von uns angenommenen System (§. 330) enthalten. Man hat mancherlei Ausgaben derselben. Die gewöhnlichsten und wohlfeilsten sind die vom Freiherrn von Wolf, von Adrian Vlacq, und von Ozanam, welche zwar nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthalten, womit sich aber Anfänger auch gar wohl behelfen können. Wer grössere verlangt, kan sich des Major Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, oder Schulzens Samlung logarithmischer, trigonometrischer, und andrer, zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln anschaffen, welche beide die Logarithmen der Zahlen bis 101000 enthalten. — Ich setze voraus, daß Jeder, welcher bis hieher gekommen ist, ein Exemplar solcher Tafeln bei der Hand habe: um die berechneten Logarithmen darin nachzuschlagen, und sich überhaupt mit ihrer Einrichtung bekant zu machen.

§. 337.

L. Die Logarithmen sind zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, von einem Schottländer, John Nepper oder Napier, Baron von Merchiston, und einem Schweizer, Namens Jobst Burgi

oder

oder Byrg, erfunden und berechnet, wiewol nach einem minder bequemen, nicht mehr üblichen System. So wie sie jetzt sind, hat sie Henrich Brigg, Professor zu Oxford, auf Neppers Anraten, zuerst berechnet und herausgegeben, weshalb sie auch, nach ihm, die briggischen Logarithmen genant werden.

§. 338.

Wie viel das hier angewandte Verfahren, die Logarithmen der PrimZahlen zu finden, vor dem bisher gewöhnlichen voraus habe, wird jeder SachVerständige von selbst einsehn. Die Ehre der Erfindung dieser erleichterten Methode gebührt dem Professor Karsten, der sie in der zweiten Ausgabe seines Auszuges aus den Anfangsgründen der Mathematik zuerst gelehrt hat. Meines Wissens aber ist sie noch in kein andres LehrBuch übergegangen, ungeachtet mehre derselben, wie das schulzische, das lorenzische, das voigtische, und die fünfte Ausgabe des kästnerschen, fünf bis sieben Jahre jünger sind, als die zweite des karstenschen Auszuges.

§. 339.

L. Zu bequemerm Gebrauche drükkt man die Logarithmen in DecimalZahlen aus. Sie haben also mit andern Decimalen gemein, daß sie aus zweierlei Ziffern bestehn, nämlich Ganzen und Brüchen, die durch ein willkührliches Zeichen, (bei

uns durch einen Strich) von einander getrennt werden (§. 227). Zum Beispiele:

λ 2 = 0,3010300

λ20 = 1,3010300 u. s. w.

Die Zahl nun vor dem Strich, welche Ganze andeutet, heisst die KennZiffer oder die Charakteristik; die Zahl hinter dem Strich aber, welche Brüche bezeichnet, heisst die Mantisse, welche man auf deutsch auch das Anhenksel, die Schleppe oder den Schweif nennen könte. Man pflegt sogar solchen Logarithmen die keine Decimal-Teile haben, wie denen von 1, von 10, von 100 ꝛc. so viele Nullen anzuhenken, als an den andern DecimalZahlen hangen, damit ein Ungeübter, wenn er z. B. die Logarithmen von 2 und von 100 addiren solte, sie nicht schreiben möge

λ 2 = 0,3010300

λ 100 = 2;

sondern genötigt sei zu setzen:

λ 2 = 0,3010300

λ 100 = 2,0000000

λ 2 + λ 100 = 2,3010300 = λ200 (§. 327)

§. 340.

L. Wenn man das briggische LogarithmenSystem:

Natürl. Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000 ꝛc.

Logarithmen 0, 1, 2, 3, 4. ꝛc.

nur mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, was bemerkt man? S.

S. Die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 haben zur KennZiffer 0; die von 10 bis 100 haben zur KennZiffer 1; die von 100 bis 1000 haben zur KennZiffer 2; und so geht es fort. So oft die natürlichen Zahlen um eine Ziffer wachsen, so oft wächst die KennZiffer der Logarithmen um 1.

L. Und da die einziffrigen Zahlen 0; die zweiziffrigen 1; die dreiziffrigen 2, u. s. w. zur KennZiffer haben; so erhellt daraus = =?

S. Daß die KennZiffer der Logarithmen immer um 1 geringer ist, als die Anzahl der Ziffern der ihnen zugehörigen Zahl.

L. Man kan also einer natürlichen Zahl gleich ansehn, welche KennZiffer ihre Logarithme haben muß: und umgekehrt kan man auch dem Logarithmen ansehn = =

S. Aus wie viel Ziffern die ihm zugehörige natürliche Zahl besteht.

L. So hat, z. B. der Logarithme von 500, zur KennZiffer 2; und der von 5000 = =?

S. Hat 3 zur KennZiffer.

L. Und der Logarithme 1,6020600 gehört einer aus zwei Ziffern bestehenden Zahl; wie viel Ziffern wird nun die Zahl des Logarithmen 3,6020600 haben?

S. Viere.

L. Die KennZiffer kan daher in den LogarithmenTafeln, ohne Nachteil, wegbleiben, wie auch wirklich in den grössern, zu Ersparung des Raums zu geschehen pflegt. — Dieses sind Vorzüge des briggischen Systems. Es werden sich deren noch mehre entwikkeln.

§. 341.

L. Es ist λ 2 = 0,30103oo (§. 331) Welches ist nun λ 20?

S. λ 20 = λ 2 + λ 10 (§ 327) = 0,30103oo + 1 = 1,30103oo.

L. Und λ 200?

S. λ 200 = λ 2 + λ 100 = 0,30103oo + 2 = 2,30103oo.

L. Es ist λ 2500 = 3,3979400; welches ist nun λ 250?

S. λ 250 = λ 2500 — λ 10 (§. 327) = 3,3979400 — 1 = 2,3979400.

L. Und λ 25?

S. λ 25 = λ 2500 — λ 100 = 3,3979400 — 2 = 1,3979400.

L. In allgemeine Formeln gekleidet, sieht dieses so aus:

Wenn

Wenn $l = \lambda n$
so ist $l + 1 = \lambda 10\, n$
$l + 2 = \lambda 100\, n$
$l + 3 = \lambda 1000\, n$ u. s. w.
$l - 1 = \lambda \frac{n}{10}$
$l - 2 = \lambda \frac{n}{100}$
$l - 3 = \lambda \frac{n}{1000}$ u. s. w.

Das heißt in Worte übersetzt . . ?

S. Um so viel Einheiten die KennZiffer eines Logarithmen wächst, so viel Mal wird die ihm zugehörige Zahl durch 10 multiplicirt. Und umgekehrt: Um so viel Einheiten die KennZiffer eines Logarithmen vermindert wird, so viel Mal wird die ihm zugehörige Zahl durch 10 dividirt.

UebungsExempel.

I. $1{,}8129134 = \lambda 65$
$1{,}8129134 + 1 = 2{,}8129134 = \lambda(65 \times 10) = \lambda 650$
$2{,}8129134 + 1 = 3{,}8129134 = \lambda(65 \times 100) = \lambda 6500$

II. $4{,}7371926 = \lambda 54600$
$4{,}7371926 - 1 = 3{,}7371926 = \lambda(54600 : 10) = \lambda 5460$
$4{,}7371926 - 2 = 2{,}7371926 = \lambda(54600 : 100) = \lambda 546$
$4{,}7371926 - 3 = 1{,}7371926 = \lambda(\frac{54600}{1000}) = \lambda 54{,}6$ (§238)
$4{,}7371926 - 4 = 0{,}7371926 = \lambda(\frac{54600}{10000}) = \lambda 5{,}46$

III. $3{,}3778524 = \lambda 2387$
$3{,}3778524 - 1 = 2{,}3778524 = \lambda 238{,}7$
$2{,}3778524 - 1 = 1{,}3778524 = \lambda 23{,}87$

IV. $0{,}8129134 = \lambda 6{,}5$
$0{,}8129134 + 1 = 1{,}8129134 = \lambda 65$

§. 342.

L. Die einem Logarithmen zugehörige Zahl wird durch Hülfe der Tafeln leicht gefunden, denn sie steht neben ihm. Welches ist Z. B. die Zahl des Logarithmen 2,6655810?

S. LZ. 2,6655810 = 463.

L. Welches aber ist des Logarithmen 2,3778524 zugehörige Zahl?

S. Dieser Logarithme steht in den Tafeln nicht. Seine Zahl fält zwischen 238 und 239.

L. Wir wollen ihn einmal unter einer höhern KennZiffer aufsuchen. Vielleicht steht 3,3778524 in den Tafeln.

S. Ja, der steht drin, 3,3778524 = λ2387

L. Da also 3,3778524 = λ2387, so ist 3,3778524 — 1 = ,,?

S. 3,3778524 — 1 = 2,3778524 = 238,7 (§. 34).

L. Nun die LogarithmenZahl 0,72311272?

S. LZ. 0,72311272 fält zwischen 5 und 6
LZ. 1,72311272 " " 52 und 53
LZ. 2,72311272 " " 528 u. 529
LZ. 3,72311272 = 5286

LZ. 0,72311272 = 5,286 (§. 341).

L. Wenn also ein Logarithme mit einer niedrigern KennZiffer als die höchste in den Tafeln, unter seiner KennZiffer nicht genau

in

in den Tafeln steht, wie werden dan die Decimal Teile der ihm zugehörigen Zahl gefunden?

S. Man sucht ihn unter einer höhern Kenn-Ziffer; verwandelt aber von der Zahl dieses grössern Logarithmen so viele Ziffern in DecimalZiffern, als man der KennZiffer Einheiten zugesetzt hat.

UebungsExempel.

Lz. 0,0969100 = λ 1,25

Lz. 0,0149417 = λ 1,035...

Lz. 0,1598242 = λ 1,444... in den kleinern

= λ 1,4448 in den grössern Tafeln.

§. 343.

L. Gesetzt ich hätte nur die kleinen Tafeln, und solte die Zahl des Logarithmen 4,8765065 angeben, der nicht drin steht, weil er zu groß ist?

S. Dan muß ich ihn unter einer kleinern Kenn-Ziffer aufsuchen.

Lz. 3,8765065 = 7525

Lz. 4,8765065 = 75250 (§. 341).

L. Also auch zu Logarithmen mit grössern KennZiffern als in den Tafeln stehn, lassen sich die natürlichen Zahlen finden. Und wie?

S. Man sucht sie unter einer kleinern Kenn-Ziffer, jedoch unter der höchsten, welche in den Tafeln steht, auf, setzt aber der daneben stehenden

Zahl

Zahl so viel Nullen zu, als man der KennZiffer Einheiten abgezogen hat.

L. Zum Beispiel: des Logarithmen 4,8765300 Zahl würde verlangt?

S. Die fält zwischen 75250 und 75260.

L. In den grössern Tafeln findet man sie 75254. Man sieht hieraus, daß sich nicht jedes Logarithmen Zahl auf diese Art ganz genau angeben lässt.

UebungsExempel.

LZ. 5,5523031 = 356700.

§. 344.

L. λ3 = 0,4771212
λ2 = 0,3010300

λ3—λ2 = 0,1760912

Haben wol alle Logarithmen einerlei Unterschied? Das heisst; wenn man jeden von dem nächstgrössern abzieht, bleibt immer 0,1760912 übrig?

S. Nein, das kan nicht: denn λ3 − λ2 = λ30 − λ20 = λ300 − λ200 = λ3000 − λ2000 u. s. w. (§. 341). Logarithmen mit der KennZiffer 3, deren zugehörige Zahlen um 1000 auseinander sind, haben keinen grössern Unterschied als zwei benachbarte Logarithmen mit der KennZiffer 0.

L. Die Unterschiede werden also immer geringer, und zwei benachbarte Unterschiede von Logarithmen

mit der KennZiffer 3, müssen beinahe einander gleich seyn: Wir wollen einmal eine Untersuchung anstellen. Zuerst mit den Logarithmen von 1001, 1002, 1003.

S. $\lambda 1003 = 3,0013009$
$\lambda 1002 = 3,0008677$
$\lambda 1001 = 3,0004341$

$\lambda 1002 - \lambda 1001 = 4336 = a$
$\lambda 1003 - \lambda 1002 = 4332 = b$

$a - b = 4$

L. Hier ist der Unterschied der Unterschiede a und b $\frac{4}{10000000}$, welches nur wenig ist. — Nun wollen wir die Unterschiede der Logarithmen von 2001, 2002, 2003 untersuchen.

S. $\lambda 2003 = 3,3016809$
$\lambda 2002 = 3,3014641$
$\lambda 2001 = 3,3012471$

$\lambda 2002 - \lambda 2001 = 2170 = c$
$\lambda 2003 - \lambda 2002 = 2168 = d$

$c - d = 2$

L. Also die Unterschiede c und d sind nur noch um $\frac{2}{10000000}$ unterschieden. — Nun noch die Unterschiede der Logarithmen von 5001, 5002, 5003!

S. $\lambda 5003 = 3,6992305$
$\lambda 5002 = 3,6991437$
$\lambda 5001 = 3,6990569$

$\lambda 5002 - \lambda 5001 = 868 = e$
$\lambda 5003 - \lambda 5002 = 868 = f$

$e - f = 0$

L. Also die Unterschiede e und f sind um kein ZehnMillionTeilchen mehr unterschieden. Man kan aber auch die $\frac{2}{10000000}$ der Unterschiede c und d, ja die $\frac{4}{10000000}$ der Unterschiede a und b als unerheblich ansehn, und annehmen: die Unterschiede benachbarter Logarithmen mit der KennZiffer 3, nähern sich einander so sehr, daß man sie, ohne sonderlichen Irtum, für gleich annehmen kan.

§. 345.

L. Können schon die Unterschiede benachbarter Logarithmen für gleich angenommen werden (§. 344), so werden noch weit eher die Unterschiede gleicher DecimalTeile eines und desselben Logarithmen dafür gelten können. Z. B.

$\lambda 5001 = 3{,}6990569$

$\lambda 5002 = 3{,}6990569 + 0{,}0000868 =$

$3{,}6991437$ (§ 344).

Welches ist nun $\lambda 5001{,}1$; $\lambda 5001{,}2$; $5001{,}3\,x$?

S. $\lambda 5001{,}1 = 3{,}6990569 + \frac{868}{10} = 3{,}6990656$

$\lambda 5001{,}2 = 3{,}6990569 + (0{,}0000087 \times 2)$

$= 3{,}6990743$

$\lambda 5001{,}3 = 3{,}6990569 + (0{,}0000087 \times 3)$

$= 3{,}6990830$

$\lambda 5001{,}4 = 3{,}6990569 + (0{,}0000087 \times 4)$

$= 3{,}6990917$

u. s. w. Uebungs-

Uebungs Exempel.

Welches ist der Logarithme von 6001,5?

Ausrechnung.

$$\lambda 6002 = 3{,}7782960$$
$$\lambda 6001 = 3{,}7782236$$

$$\lambda 6002 - \lambda 6001 = (724)$$
$$\frac{1}{10} = (724)$$
$$\frac{5}{10} = 3620$$

$$\lambda 6001{,}5 = 3{,}77825980$$

§. 346.

$$\left.\begin{array}{l} \text{L. } \lambda 5001{,}1 = 3{,}6990656 \\ \lambda 5001{,}2 = 3{,}6990743 \end{array}\right\} \text{(§. 345)}$$

u. s. w.

Welches ist nun λ 50011, λ 50012 &c.?

$$\left.\begin{array}{l} \text{S. } \lambda 50011 = 4{,}6990656 \\ \lambda 50012 = 4{,}6990743 \end{array}\right\} \text{(§. 341)}$$

L. Es erhellt schon hieraus, daß sich auch grössere Logarithmen als die in den Tafeln enthaltenen auf diese abgekürzte Art ~~sich~~ finden lassen. Wir haben zwar den von 50012 schon gefunden; wir wollen ihn aber noch ein Mal suchen, und zwar nicht erst durch den Umweg der DecimalTeile (§. 345), sondern geradezu. Wir

bedies

bedienen uns dabei der kleinen Tafeln. In dieser finden wir nicht 50012, sondern nur

$$\lambda\ 5001 = 3{,}6990569$$
$$\lambda\ 5002 = 3{,}6991437$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\,50010 = 4{,}6990569\\ \lambda\,50020 = 4{,}6991437\end{array}\right\}\ (\S.\ 341)$$

$$\lambda 50020 - \lambda 50010 = 868$$

Nun schliesse ich:

Geben 10 einen LogarithmenUnterschied von 868
so geben 2 einen dergleichen von x

Oder:

$$10\ ..\ 868 = 2\ ..\ \tfrac{868\times 2}{10}\ (\S.\ 286)$$

$$\lambda 50012 = 4{,}6990569$$
$$+\quad 173\tfrac{3}{5}$$
$$= 4{,}6990743$$

Nun wollen wir nach eben dieser Art suchen den Logarithmen von 500125.

S. a) $\lambda\ 500100 = 5{,}6990569$
$\lambda\ 500200 = 5{,}6991437$

Unterschied 868

b) $100\ ..\ 868 = 25\ ..\ 217$

c) $\lambda\ 500125 = 5{,}6990569$
$+\quad 217$
$= 5{,}6990786$

L. Das war die Auflösung der Aufgabe in Exempeln; jetzt müssen wir sie auch in Worten vortragen.

S.

S. Man schneidet von der gegebenen Zahl so viel Ziffern ab als man in seinen Tafeln findet, ~~und~~ ersetzt die weggestrichenen durch Nullen, und sucht den ihr ~~ihnen~~ zugehörigen Logarithmen. Hierauf sucht man auch den Logarithmen der nächst höhern, aber mit eben so viel Nullen als die vorigen, vermehrten Zahl, und zieht den ersten von diesem lezten ab. Nun schliesst man:

Wie sich verhält der Unterschied der gefundenen Zahlen, zu dem Unterschiede ihrer Logarithmen;

so verhält sich der Ueberschuß der gegebenen Zahl über die nächst kleinere zu dem Unterschiede ihrer Logarithmen.

Dieser dem kleinern Logarithmen addirt, gibt den gesuchten.

L. So ist es recht. Man muß aber wohl bemerken, daß dieses Verfahren den Logarithmen nicht ganz genau gibt. Auch muß man, um sich nicht unnötige Mühe zu machen, vorher zusehn, ob die Zahl, deren Logarithmen man sucht, sich nicht in solche Factoren zerfällen läßt, deren Logarithmen in den Tafeln stehn, und deren Addition die verlangten gibt (§. 327). — Solte das nicht mit 500125 der Fall gewesen seyn?

S. Ja: denn $500125 = 4001 \times 125$.

L. Wie hätten wir also den Logarithmen von 500125 kürzer und genauer finden können?

S.

S. Wenn wir die Logarithmen von 4001 und von 125 addirt hätten:

$$\lambda\ 4001 = 3{,}6021685$$
$$\lambda\ 125 = 2{,}0969100$$
$$\lambda\ 500125 = 5{,}6990785$$

L. Zur Uebung war es indessen gut, ihn auf beiderlei Art zu suchen, um zu sehn, in wie weit sie überein stimmen. Die Erfahrung hat gelehrt, daß sie erst in der siebenten DecimalZiffer von einander abweichen.

UebungsExempel.

I. $\lambda\ 11841 = 4{,}0433883 = \lambda\ 3947 + \lambda 3$
II. $\lambda\ 206125 = 5{,}3141307 = \lambda\ 8245 + \lambda 25$
III. $\lambda\ 356789 = 5{,}5524115$
IV. $\lambda\ 757952 = 5{,}8796417 = 11843 + \lambda 64$

(Diese Factoren kommen nur den Besitzern der grossen Tafeln zu statten.)

V. $\lambda\ 2345685 = 6{,}3702697$
VI. $\lambda\ 2389427 = 7{,}3671588$.

§. 347.

L. Wie man die DecimalTeile der Zahl eines Logarithmen mit einer niedrigern KennZiffer, als die höchste in den Tafeln enthaltene, findet, haben wir gelernt (§. 342): gesetzt aber man hätte nur die kleinern Tafeln, und verlangte die DecimalTeile des Logarithmen 3,8990803?

S.

S. 1) Von dem gegebenen Logarith. = 3,8990803
abgezogen der nächst kleinere = 3.8990541
gibt Ueberschuß = 262

2) Von dem nächst grössern = 3,8991089 = λ7927
den nächst kleinern = 3,8990541 = λ7926
Ueberschuß = 548

3) 548 . . 1 = 262 . . $\frac{262}{548}$
4) $\frac{262}{548} = \frac{131}{274} = 0{,}47810\ldots$
5) 3,8990541 = λ7926;

3,8990803 = λ7926,47810 . . .

L. Diese Aufgabe heisst: Es wird gegeben ein Logarithme (3,8990803) mit der höchsten in den Tafeln befindlichen KennZiffer (3) welcher nicht genau in den Tafeln enthalten ist: man soll die ihm zugehörige Zahl mit ihren DecimalTeilen angeben. — Und die Auflösung ist . . ?

S. Man schliesst so:

Wie sich verhält der Unterschied des nächst grössern
und nächst kleinern Logarithmen (548)
Zu dem Unterschiede ihrer Zahlen (1)
So verhält sich der Unterschied des gegebnen und
des nächst kleinern Logarithmen (262)
zu dem Unterschiede ihrer Zahlen ($\frac{262}{548}$)

L. Oder noch kürzer: Man dividirt den Ueberschuß des gegebenen über den nächst kleinern Logarithmen (262) durch den Ueberschuß des nächst

grössern über den nächst kleinern (548) das gibt $\frac{262}{548} = 0,47810...$ Nun können wir auch obigem Exempel eine bequemere Einrichtung geben. Es kan, nämlich, so stehn:

Gegeb. Log. = 3,8990803 = λ7926...
Nächst klein. L. = 3,8990541 = λ7926
Nächst gröss. L. = 3,8991089 = λ7927

548 = λ7926 − λ7927
262 = λ7926 − λ7926

262 : 548 = 0,47810...
3,8990803 = λ7926,47810...

Und nach diesem Muster wollen wir die nun folgenden Exempel berechnen.

Uebungs-Exempel.

3,8765326 = λ7525,452...
3,5976293 = λ3959,399...
2,5976293 = λ395,9399...

§. 348.

L. 3,8990803 = λ7926,478...(§. 347).
Welches aber ist des Logarithmen 4,8990803 zugehörige Zahl?

S. Wenn 3,8990803 = λ7926,478...
so ist 4,8990803 = λ79264,78...
(§. 341, 342).

L. Und die Zahl des Logarithmen 5.8990803?

S. 5,8990803 = λ792647,8...

L.

k. Also auch die Zahlen solcher Logarithmen, wie 4,8990803, von denen weder Kenn-Ziffer, noch Mantisse in den Tafeln steht, lassen sich dennoch genauer angeben. Und wie?

S. Man gibt dem Logarithmen die höchste in den Tafeln enthaltene KennZiffer (3) und sucht seine Zahl nach §. 347; rükkt aber den Strich, welcher die DecimalTeile absondert, so viele Stellen vor, als der KennZiffer Einheiten verloren hat.

UebungsExempel.

$4{,}8765326 = \lambda 75254{,}517\ldots$

$5{,}8765300 = \lambda 752540{,}72\ldots$

$5{,}5976293 = \lambda 395939{,}9\ldots$

$6{,}5524118 = \lambda 3567893{,}17\ldots$ nach den kleinen

$= \lambda 3567892{,}62\ldots$ nach den gröss. Tafeln.

§. 349.

Die Besitzer der grössern Tafeln können das leichter haben. Z. B. die Zahl des Logarithmen 4,8765326 wird durch dieselben, ohne Rechnung, gefunden = 75254. Verlangt man eine Ziffer mehr, so sucht man die beiden Unterschiede (§. 347).

1) Von dem gegebnen Logarithmen = 4,8765326
abgezogen der nächst kleinere = 4,8765296

Ueberschuß = 30

2) Von dem nächst grössern = 4,8765354
abgezogen der nächst kleinere = 4,8765296

Ueberschuß = 58

P. P.	
	58
1	6
2	12
3	17
4	23
5	29
6	35
7	41
8	46
9	52
Diff.	

Wie viel DecimalTeile nun der Ueberschuß 30 gibt, findet man, ohne Rechnung, in der Tafel, wenn man, auf eben der Seite, wo der gegebne Logarithme stehn solte, in der lezten Spalte, die oben mit P. P. und unten mit Diff. bezeichnet ist, zuerst den Unterschied (Diff.) 58, und unter den darunter stehenden neun Zahlen den Ueberschuß 30, oder die ihm am nächsten kommende Zahl aufsucht, welche hier 29 ist. Neben derselben nun findet man die Zahl 5, welche anzeigt, wie viel ProportionalTeile (partes proportionales) auf den Ueberschuß 29 gehn, nämlich 5, die der bereits gefundenen Zahl noch anzuhenken sind, so daß $4{,}8765326 = \lambda 7525415\ldots$

UebungsExempel.

$5{,}3669223 = \lambda 232767{,}48\ldots$

§. 350.

Die wichtigsten Dienste leisten die Logarithmen bei Ausziehung der Wurzeln, indem sie die Operation in blosses Dividiren verwandeln, und man folglich durch sie, ohne grosse Mühe, nicht nur die Quadrat- und CubicWurzeln, sondern auch die Wurzeln des vierten, fünften, sechsten; ja hundertsten, tausendsten 2c. Grades erhält (§. 328).

Uebungs-

Uebungs-Exempel.

1) $\sqrt{9216} = \lambda 9216 : 2 = 3{,}9645425 : 2 = 1{,}9822712$
$= \lambda 96$

2) $\sqrt{9365} = 3{,}9715078 : 2 = 1{,}9857539 = \lambda 96{,}772$

3) $\sqrt{10} = 1{,}0000000 : 2 = 0{,}5000000 = \lambda 3{,}1622..$

4) $\sqrt{3} = 0{,}4771212 : 2 = 0{,}2385606 = \lambda 1{,}7320..$

5) $\sqrt[3]{3} = 0{,}4771212 : 3 = 0{,}1590404 = \lambda 1{,}4422..$

6) $\sqrt[3]{10} = 1{,}0000000 : 3 = 0{,}3333333 = \lambda 2{,}1544..$

7) $\sqrt[3]{98765} = 4{,}9946031 : 3 = 1{,}6648677 = \lambda 46{,}224$

8) $\sqrt[4]{98765} = 4{,}9946031 : 4 = 1{,}2486508 = \lambda 17{,}727$

9) $\sqrt[5]{98765} = 4{,}9946031 : 5 = 0{,}9989206 = \lambda 9{,}9751$

10) $\sqrt[10]{98765} = 4{,}9946031 : 10 = 0{,}4994603$ (§. 238)
$= \lambda 3{,}1583..$

11) $\sqrt[50]{98765} = 4{,}9946031 : 50 = 0{,}0998920$
$= \lambda 1{,}2586$

12) $\sqrt[100]{98765} = 4{,}9946031 : 100 = 0{,}0499460$
$= \lambda 1{,}1218..$

13) $\sqrt[500]{98765} = 4{,}9946031 : 500 = 0{,}0099892$
$= \lambda 1{,}0232..$

14) $\sqrt[1000]{98765} = 4{,}9946031 : 1000 = 0{,}0049946$
$= \lambda 1{,}0115..$

15) $\sqrt[10000]{98765} = 4{,}9946031 : 10000 = 0{,}0004994$
$= \lambda 1{,}00115..$

Logarithmen §. 362.

§. 351. Arithmetica Finita 145

Auch bei Erhebung zu Potenzen sind die Logarithmen mit Vortheil zu gebrauchen (§. 328).

Uebungs-Exempel.

1) $2^9 = \lambda 2 \times 9 = 0{,}3010300 \times 9 = 2{,}7092700$
$= \lambda 512$

2) $2^{10} = 0{,}3010300 \times 10 = 3{,}0103000 = \lambda 1024$

3)

3) $3^{10} = 0{,}47712125 \times 10 = 4{,}7712125$
$= \lambda 59049$

4) $2^{20} = 0{,}30103000 \times 20 = 6{,}0206000$
$= \lambda 104856..$

Hier zeigt die KennZiffer 6, daß die Potenz 2^{20} sieben Ziffern haben muß, (§. 340) von denen aber die grossen Tafeln nur fünfe (10485) angeben, allenfalls die sechste (7) noch, durch Hülfe der ProportionalTeile (§. 349) finden helfen. Besteht also eine Potenz aus mehr als 6 Ziffern, so kan diese LogarithmenRechnung dienen, einen Ueberschlag zu machen, wie groß die gesuchte Zahl ohngefähr werden müsse. Die KennZiffer des Logarithmen nämlich zeigt, wie viel Ziffern sie haben muß, und die Tafeln geben die fünf bis sechs ersten derselben an.

UebungsExempel.

5) $2^{64} = 0{,}30103000 \times 64 = 19{,}2659200$
$= \lambda 184467..$ (§. 318)

6) $2^{100} = 0{,}30103000 \times 100 = 30103000$
$= \lambda 126765..$

§. 352.

Um auch ein Exempel von Multiplication und Division durch Hülfe der Logarithmen zu geben, wollen wir zu 9876, und 678, und 7654, die vierte geome-

geometrische ProportionalZahl, $x = \frac{7654 \times 678}{9876}$ (§. 286) suchen. Man pflegt dieses so zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\, 9876 = 3{,}9945811 \\ \lambda\, 678 = 2{,}8312297 \\ \lambda\, 7654 = 3{,}8838885 \end{array}\right\}$$

$$\lambda\, 678 + \lambda\, 7654 = 6{,}7151182$$

$$\lambda\, x = 2{,}7205371 = \lambda\, 525{,}45..$$

Die genauere Rechnung (§. 286) gibt $x = \frac{7654 \times 678}{9876}$

$$= 525 + \frac{4512}{9876} = 525 + \frac{376}{823} = 525{,}456865..$$

Von den Logarithmen der Brüche.

§. 353.

L. Die GrundLage des briggischen Logarithmen-Systems sind die Reihen:

$10^0 \;..\; 10^1 \;..\; 10^2 \;..\; 10^3$ ꝛc.

1 .. 10 .. 100 .. 1000 (§. 230)

0, 1, 2, 3.

Wenn man nun diese rükkwärts fortsetzt, so erhält man:

ꝛc. 10^{-3} .. 10^{-2} .. 10^{-1} .. 10^0 .. 10^1 .. 10^2 .. 10^3

$\frac{1}{1000}$ .. $\frac{1}{100}$ .. $\frac{1}{10}$ .. 1 .. 10 .. 100 .. 1000

—3, —2, —1, 0, 1, 2, 3

L. Der Logarithme von 1 also ist und bleibt 0: welches aber ist der von $\frac{1}{10} = 0{,}1$?

S.

S. $\lambda \frac{1}{10} = \lambda 0{,}1 = -1$

L. Und der von $\frac{1}{100}$? von $\frac{1}{1000}$ ..?

S. $\lambda \frac{1}{100} = \lambda 0{,}01 = -2$

$\lambda \frac{1}{1000} = \lambda 0{,}001 = -3$.

L. Und so geht es weiter. Da die Logarithmen rükkwärts immer abnehmen, und der Logarithme von 1 schon 0 ist; so ist jeder Logarithme, dessen Zahl kleiner ist als 1; das heisst, jeder Logarithme eines ächten Bruches ..?

S. Auch kleiner als 0, das ist verneinend.

§. 354.

L. In dem briggischen LogarithmenSystem ist die GrundZahl = 10 (§. 325, 330). Wenn man aber dafür einen ächten Bruch, etwan $\frac{1}{2}$ annähme, so wäre das System:

ꝛc.	$(\frac{1}{2})^{-3}$	$(\frac{1}{2})^{-2}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^{0}$	$(\frac{1}{2})^{1}$	$(\frac{1}{2})^{2}$	$(\frac{1}{2})^{3}$	ꝛc. R
	8,	4,	2,	1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{8}$,	=
	−3,	−2,	−1,	0,	1,	2,	3,	L

und es erhielten die ganzen Zahlen verneinende, und die gebrochenen, bejahende Logarithmen. Die nepperischen Logarithmen (§. 337) waren von dieser Beschaffenheit. (Karsten's Lehrbegriff allg. RechenKunst §. 146).

§. 355.

L. Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen ganzer Zahlen: wie wird man nun die Logarithmen der Brüche finden? Welches wird z. B. der Logarithme von $\frac{2}{3}$ seyn?

S.

S. $\frac{2}{3} = 2:3$

Folglich $\lambda\frac{2}{3} = \lambda(2:3) = \lambda 2 - \lambda 3$ (§. 327)

Es ist aber $\lambda 2 = 0{,}3010300$

$\lambda 3 = 0{,}4771212$

$\lambda\frac{2}{3} = -0{,}1760912$ (§. 131)

L. Aber eines uneigentlichen Bruches $\frac{3}{2}$ Logarithme?

S. $\lambda\frac{3}{2} = \lambda 3 - \lambda 2 = 0{,}1760912$.

L. Der Logarithme eines Bruchs also, der Bruch mag ächt oder unächt seyn .. ?

S. Ist der Ueberschuß des Logarithmen des Zählers über des Nenners seinen.

L. Zu merken jedoch, daß bei ächten Brüchen dieser Ueberschuß verneinend ist (§. 353).

UebungsExempel.

$\lambda\frac{3}{4} = \lambda 3 - \lambda 4 = -0{,}1249388$

$\lambda\frac{1}{16} = \lambda 1 - \lambda 16 = -1{,}2041200$.

§. 356.

L. Aber welches ist der Logarithme eines DecimalBruches 0,75?

S. $0{,}75 = \frac{75}{100}$ (§. 235)

Folgl. $\lambda 0{,}75 = \lambda\frac{75}{100} = \lambda 75 - \lambda 100$ (§. 357)

$= 1{,}8750613 - 2$

Oder auch $\lambda 75 = 1{,}8750613$

$\lambda 100 = 2{,}0000000$

$\lambda 0{,}75 = -0{,}1249387 = \lambda\frac{3}{4}$ (§. 355)

L

L. Aber der Logarithme von 2,75?

S. $\lambda\, 2{,}75 = \lambda \frac{275}{100} = \lambda\, 275 - \lambda\, 100 =$ 2,4393327 — 2 = 0,4393327.

L. Um also den Logarithmen eines Decimalbruches zu finden, er mag Ganze neben sich haben, oder nicht = = ?

S. Zieht man den Logarithmen, welche sein Nenner haben solte, von dem seines Zählers ab.

L. Für die Logarithmen ächter Decimalbrüche (wie 0,75) erhält man so zweierlei Ausdrükke:

$\lambda\, 0{,}75 = 1{,}8750613 - 2 = -0{,}1249387$

Man kan nämlich die Subtraction entweder wirklich verrichten, oder sich begnügen, sie bloß anzudeuten. Die lezte Art hat, ausser dem Vorzuge der Kürze, noch den, daß sie einen bejahenden Logarithmen gibt, anstat daß die erste ihn verneinend darstellt.

Uebungsexempel.

1) $\lambda\, 0{,}324 = 2{,}5105450 - 3 = 0{,}5105400 - 1$
$= -0{,}4894549$

2) $\lambda\, 0{,}0625 = 2{,}7958800 - 4 = 0{,}7958800 - 2$
$= -1{,}2041199\ (= \lambda \frac{1}{16})$

3) $\lambda\, 0{,}666.. = 2{,}8234742 - 3 = 0{,}8234742 - 1$.
$= -0{,}1765257$

4) $\lambda\, 0{,}6666.. = 3{,}8238653 - 4 = -0{,}1761346$
[kömt $\lambda \frac{2}{3}$ nahe (§. 355)]

5) $\lambda\, 4{,}738 = 3{,}6755951 - 3 = 0{,}6755951$

6) $\lambda\, 47{,}38 = 3{,}6755951 - 2 = 1{,}6755951$

7) $\lambda\, 0{,}57932 = 4{,}7629185 - 5 = 0{,}7629185 - 1$

§. 357.

§. 357.

Bei der Rechnung mit Logarithmen muß man nie vergessen, daß man nur die von 1, 10, 100, 1000 ꝛc. genau, alle übrigen aber nur bis auf sieben Decimal-Stellen hat, und daß nach der siebenten DecimalZiffer noch eine Menge Ziffern folgen müßten, welche weggelassen sind. Macht man hiervon Anwendung auf das erste Exempel §. 356; so ergibt sich, daß die lezte Ziffer von λ0,75 eigentlich nicht 7, sondern 6 seyn muß. Man denke sich λ75 mit acht DecimalZiffern, so wird man, um die Subtraction verrichten zu können, dem λ100 auch acht Nullen geben müssen, und da wird denn schon die siebente in 9 verwandelt (§. 30) so daß man nun 9−3=6, für die lezte DecimalZiffer von λ0,75 erhält, anstat daß sie vorher 10—3=7 war. — Hier ist dieser Umstand sehr unerheblich, es kan aber Fälle geben, wo mehr darauf ankömt.

§. 358.

L. λ0,324 = —0,4894594 = 0,5105450—1 } (§. 356)

= 1,5105450—2 = 2,5105450—3 } (§. 31)

u. s. w.

Es erhellt hieraus, daß jeder Logarithme sich auf unzählige Arten ausdrükken läßt. — Wie kan das geschehen?

S. Wenn man ihm hinten so viel nimt, als man ihm vorne gibt.... Das heißt: wenn man ihm, unter Vorsetzung des SubtractionsZeichens, hinten so viel anhenkt, als man seiner KennZiffer hinzugefügt hat.

L.

L. Es ist also $\lambda 2 = 0,3010300$
$= 1,3010300 - 1$
$= 2,3010300 - 2$ x.

§. 359.

L. DecimalBrüche also lassen sich bejahend ausdrükken (§. 358): solte eben das nicht auch bei gewöhnlichen Brüchen angehn?

S. Wir wollen es mit $\frac{2}{3}$ versuchen:

$\lambda 2 = 0,3010300 = 1,3010300 - 1$ (§. 358)
$\lambda 3 = 0,4771212 = 0,4771212$

$\lambda \frac{2}{3} = -0,1760912 = 0,8239088 - 1$

L. Da haben wir eine neue Art die Logarithmen der gewöhnlichen Brüche zu finden; oder sie, wie die Logarithmen der DecimalBrüche (§. 353) bejahend, mit einem verneinenden Anhange auszudrükken. Welches ist das Verfahren?

S. Man addirt zur KennZiffer des Logarithmen, von welchem der Abzug geschehen soll, so viel als nötig ist, daß er geschehn könne: henkt aber diesen Zusatz, mit dem SubtractionsZeichen, dem Logarithmen hinten an.

UebungsExempel.

$\lambda \frac{3}{4} = 0,8750613 - 1$
$\lambda \frac{1}{16} = 0,7958799 - 2$

§. 360.

L. Welches ist die Zahl des Logar. 0,1598242?

S. 1,445.

L. Welches aber ist des verneinenden Logarithmus — 0,1598242 zugehörige Zahl?

S. Sie ist ein ächter Bruch (§. 353), den ich aber nicht anzugeben weis.

L. Wir wollen einmal addiren.

$$+ 0{,}1598242$$
$$\text{und } - 0{,}1598242$$

S. Gibt 0 zur Summe (§. 123)

L. $0{,}1598242 + (-0{,}1598242) = 0$;

$$-0{,}1598242 = 0 - +0{,}1598242$$

(§. 37)

Da haben wir ja den Wert des verneinenden Logarithmen! läßt er sich nicht deutlicher, oder verständlicher ausdrükken?

S. $-0{,}1598242 = 0 - +0{,}1598242 = \frac{1}{1{,}445}$

(§. 357).

L. Ganz recht! — Um eine allgemeine Formel zu erhalten, wollen wir die unbekante Zahl des verneinenden Logarithmen v, und die des entgegen stehenden bejahenden b nennen.

Für $+0{,}1598242 + (-0{,}1598242) = 0$

setzen wir dan: $b \times v$ (§. 327) $= 1$ (§. 330)

$$v = \frac{1}{b}$$

Dieses in Worte gekleidet, heißt = =?

S. Die Zahl eines verneinenden Logarithmen ist ein Bruch, der zum Zähler 1, und zum Nenner die Zahl des entgegen stehenden bejahenden Logarithmus hat. Ue-

UebungsExempel.

— 0,1249387 = $\lambda \frac{1}{1,333}$ .. = $\frac{1000}{1333}$ .. = 0,75018..

— 0,1760912 = $\lambda \frac{1}{1,5}$ = $\lambda \frac{10}{15}$ = $\frac{2}{3}$ = 0,666...

— 1,2041200 = $\lambda \frac{1}{16}$ = 0,062...

§. 361.

L. Was wird aber ein BruchLogarithme der zweiten Art

0,8239088 — 1

für eine Zahl bedeuten?

S. 0,8239088 — 1 = λ 6,666... — λ 10 = $\frac{6666}{10}$ (§. 327) = 0,666...

L. Und 0,8239088 — 2?

S. 0,8239088 — 2 = λ 6,666... — λ 100 = $\frac{6666}{100}$... = 0,06666..

L. Also eines zusammengesezten Bruch-Logarithmen Zahl ist ein Bruch, dessen Zähler die Zahl des bejahten, und dessen Nenner die des verneinten Logarithmen gibt. Sonst lassen sich diese BruchLogarithmen auch noch auf andre Art auflösen.

S. Man muß sie in Logarithmen der ersten Art (§. 362) verwandeln, und dan wie vorhin verfahren.

Von 0,8239088
abgezogen 1,0000000

bleibt — 0,1760911 (§. 130) = $\frac{1}{1,5}$ (§. 362) = 0,666...

L. Da seht ihr die UebereinStimmung beider VerfahrungsArten: die erste aber hat Vorzüge vor dieser zweiten; und welche sind es? S.

S. Sie stellt die verlangte Zahl gleich in DecimalBrüchen dar, anstat daß die zweite erst eine Verwandlung nötig macht.

L. Recht! Und daher wollen wir es künftig mit der ersten halten.

UebungsExempel.

0,9850583—1 = 0,96618...
0,84017 57—1 = 0,69211...

§. 362.

L. Zum Beschlusse folgen noch einige Rechnungen mit BruchLogarithmen, um zu sehn, ob sich dabei Schwirigkeiten ereignen. — Es soll aus $\frac{2}{3}$ vermittelst der Logarithmen, die QuadratWurzel gezogen werden. Es gibt aber für jeden BruchLogarithmen zweierlei Ausdrükke (§. 359): man kan also die Wurzel auf zweierlei Art finden.

S. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \lambda\frac{2}{3} : 2$ (§. 328)

a) $\lambda\frac{2}{3} : 2 = -0,1760912 : 2 = -0,0880456$
$= \lambda\frac{1}{12247}$ (§. 360) $= 0,8165...$

b) $\lambda\frac{2}{3} : 2 = (0,8239088-1) : 2 = 0,4119544-\frac{1}{2}$
$= 0,4119544 - 0,5 = 0,9119544-1$
$= \frac{81649...}{10} = 0,81649...$

L. Solte das Verfahren nicht kürzer seyn, wenn man den zu dividirenden Logarithmen gleich so einrichtete, daß der verneinte Anhang kein Bruch würde?

S. $\lambda\frac{2}{3} : 2 = (0,8239088-1) : 2 = (1,8239088-2) : 2 = 0,9119544-1 = 0,81649...$

L.

§. Nach diesem lezten Muster wollen wir nun noch einige Exempel berechnen.

UebungsExempel.

I. $\lambda\sqrt{}0,26794 = (4,4280376-5):2 =$
$(1,4280376-2):2 = 0,7140188-1 = \lambda 51763..$

II. $\sqrt{}0,57932 = (4,7629185-5):2 =$
$(1,7629185-2):2 = 0,8814592-1 = \lambda 0,76113$

III. $\sqrt{}0,3 = \frac{\lambda 0,3}{2} = 0,7385106-1 = \lambda 0,54773$

IV. $\sqrt[3]{}0,002 = \frac{\lambda 0,002}{3} = (0,3010300-3):3$
$= 0,1003433-1 = \lambda 0,12599...$

V. $\sqrt[3]{}0,02 = \frac{\lambda 0,02}{3} = (0,3010300-2):3$
$= (1,3010300-3):3 = 0,4336766-1$
$= \lambda 0,27144...$

VI. $\sqrt[4]{\frac{5499^2}{7364^3}} = (\lambda 5499 \times 2 - \lambda 7364 \times 3):4$

a) $\lambda 5499 = 3,7402837$
$\lambda 5499 \times 2 = 7,4805674 = 12,4805674-5$
(§. 359)

b) $\lambda 7364 = 3,8671138$
$\lambda 7364 \times 3 = 11,6013414 = 11,6013414$

c) $\lambda 5499 \times 2 - \lambda 7364 \times 3 = 0,8792260-5$
$= 3,8792260-8$

d) $\frac{\lambda 5499 \times 2 - \lambda 7364 \times 3}{4} = = 0,9698065-2$
$= \lambda \frac{9,32838...}{100} = \lambda 0,0932838...$

Druck- und Schreibfehler des zweiten Teils.

Seite 9 auf dem Rechenbrette, sind in der Reihe B drei Zehner wegzustreichen.

— 30. Zeile 7. steht : : ? für = = ? (Dieser sehr ofi vorkommende Fehler wird hier ein für alle Mal angezeigt).

— 45. Z. 8 von unten fehlt das Wort in.

— 58. Z. 12. steht 11110 für 511110.

— 63. Z. 4. steht 5. für 5,

— 74. Z. 5 zu Anfange, fehlt oder.

— 85. Z. 7. steht 40 für §. 41.

— 100. Z. 4. von unten steht §. 34 für §. 56.

— 104. Z. 6. steht = × für = 24 ×

— 107. Z. 2 und 3. steht 360 für 372.

— 130. Z. 2. steht $\frac{1}{2 \times 2}$ für $\frac{1}{4 \times 2}$

Z. 3. steht $\frac{1}{4 \times 2}$ für $\frac{1}{2 \times 2}$

— 190. Z. 11. steht + d für + + d.

— 192. Z. 4. steht + 2b für — 2b.

Z. 9. steht — 2b für + 2b.

Z. 13. steht zu ihrem für und ihren.

— 193. Z. 9. steht S. ::: für S. =:=

— 196. Z. 9. steht nun für nur.

— 204. Z. 7. steht §. 107 für §. 136.

— 205. Z. 4. von unten steht sehen für setzen.

— 207. Z. 4. ist hinter 12 einzuschieben + 10.

— 208. Z. 11. steht §. 42. für §. 43.

Z. 4. von unten steht §. 15. für §. 16.

Z. 3. von unt. steht §. 187 für §. 138.

Seite 213. Z. 15. steht §. 18. für §. 20.
Z. 2. v. u. steht §. 27. 28. für §. 25.
— 214. Z. 7. ist eben dieser Fehler.
— 217. Z. 4. v. u. steht §. 137 für §. 139.
— 218. Z. 12. steht §. 38. für §. 43.
Z. 15. steht §. 138. für §. 139.
— 219. Z. 8. steht §. 138. für §. 108.
— 220. §. 146. Z. 4. steht § 72. für §. 87.
— 221. Z. 5. steht §. 77. für § 82.
— 222. Z. 10 und 19. steht §. 41 für §. 42.
— 223. Z. 3. steht §. 42. für §. 43.
— 225. Z. 10 u. 11. v. u. steht — b für — bb.
— 228. Z. 5. steht §. 42. für §. 43.
— 230. Z. 4. v. u. st. § 89, 125 f. §. 90, 126.
— 231. Z. 8. ist — b zum zweiten Mal in — $\frac{bd}{d}$ zu verwandeln.
Z. 13. steht §. 95. für §. 96.
Letzte Zeile steht $\frac{}{x}$ für $\frac{6}{x}$
— 232. Z. 3. st. §. 98. f. §. 99. u. §. 95 f. §. 96.
Z. 4. steht §. 98. für §. 100.
Z 5. steht $\frac{y \dagger y}{5}$ für $\frac{y \dagger 3}{5}$
— 236. Z. 10. v. u. st. machten es für nanten sie.
— 237. Z. 6 und 7. von unten, steht 12te, 12ten, für nte, nten.
— 239. §. 156. steht $\frac{a2}{b2}$, $\frac{a3}{b3}$, $\frac{a4}{b4}$, für $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$
— 240. Z. 6. steht $\frac{a^n}{ca}$ für $\frac{a^n}{c^n}$
— 241. Z. 4. v. unt. steht §. 152. für §. 153.
Z. 2. v. unt. steht §. 138. für §. 139.

Seite 242. Z. 3. v. unt. steht (§. 125) addirt, für addirt (§. 126).

— 246. Z. 9. steht — b^4 für b^6

Letzte Z. steht § 15. für §. 16.

— 247. Z. 10. steht die für den

Z. 15. steht §. 154. für §. 155.

— 251. Z. 9. v. u. steht § 161. für §. 162.

Z. 2. v. u. steht 5^1 für 4^1

— 252. Z. 4. ist am Ende (§. 115) hinzuzufügen.

Z. 5. steht (§. 83) für (§. 96).

— 253. Z. 2. steht (§. 162) für (§. 163).

Z. 4. steht = a für $= \frac{1}{a}$

— 254. Z. 2. steht §. 162. für § 163.

— 255. Z. 5 steht bejahenden für bejahendem.

Z. 7. steht §. 164. für §. 165.

— 256. Z. 5 ist vor Exponenten das Wort verneinenden einzuschieben.

— 257. Z. 6. steht §. 95. für §. 96.

— 260. Z. 2. steht §. 162. für §. 163.

— 262. Exemp. III. Z. 1. steht $\frac{a}{c}$ für $\frac{c}{a}$

— 264. Z. 3. v. u. steht §. 112. für §. 114.

— 265. Z. 5. steht $= 1\frac{1}{2}$ für $= 1 + \frac{1}{2}$

— 267. Z. 1. steht §. 172. für §. 173.

Z. 12. steht §. 73. für §. 75.

— 270. Z. 7. steht § 171. für § 172.

§. 175. Z. 2 steht $\frac{2}{0} \angle \frac{1}{0}$ für $\frac{2}{0} > \frac{1}{0}$

— 274. Z. 5. steht § 42. für §. 43.

— 281. Z. 3. v. u. steht $a^{6)} \sqrt[2\times3]{}$ für $a^{6)} = \sqrt[2\times3]{}$

— 282. Z. 12. steht §. 89 für §. 90.

— 283. Z. 8. steht §. 90. für §. 91.

Z. 2. v. u. steht $^{3}\times\sqrt{}$ für $^{3}\times^{8}\sqrt{}$

Seite 287. Z. 8. v. u. steht $^{2}\sqrt{}$ für $^{3}\sqrt{}$

— 289. In den Exempeln steht der WurzelExponent elfmal unrichtig neben dem Zeichen, anstat in der Oeffnung desselben zu stehn.

— 297. Z. 4. steht $4\sqrt{})^2$ für $4\sqrt{2})^2$

— 298. Z. 2. v. u. steht §. 87. für §. 88.

— 301. Z. 1. steht $(a+b^{n-1})]$ für $(a+b)^{n-1}]$

Z. 2. steht $(a+b^{n-1}]$ für $(a+b)^{a-1}]$

— 302. Z. 8. steht nun für um.

Z. 2. v. u. steht §. 89. für §. 90.

— 304. §. 194. Z. 3. steht §. 42. für §. 43.

— 305. Z. 12. steht $a^{-\frac{2}{2}}$ für $a^{-\frac{2}{2}}$

— 309. §. 195. Z. 3. steht = 1 für = 3.

— 311. Z. 8. steht $[\sqrt{a^2+b^2+b}]$ für $[\sqrt{(a^2+b^2)+b}]$

— 316. Z. 5. steht b^2 für $b)^2$

Z. 8. steht vierten für zweiten.

— 317. Z. 9. steht $+^2+2a$ für $+c^2+2(a$

— 328. Z. 14. steht niedrigsten für niedrigste.

— 331. §. 207. Z 7. u f. ist der Druck sehr undeutlich ausgefallen. Zuvorderst steht das Exempel zu nahe an dem Texte. Man wird daher wol tuhn, beide durch einen VerticalStrich, der hinter schreibe anfängt, und bis herunter reicht, zu trennen. — Hiernächst sind die Buchstaben und Zeichen $a+b+c$ etwas

herunter zu rükken, und mit den darunter stehenden so zu verbinden:

$$\begin{array}{r} a \quad + b + c \\ \sqrt{11|90|25} = 300 + 40 + 5 = 345 \end{array}$$

Z. 3. v. u. steht §. 205. für §. 206.

Seite 336. Z. 1. steht **wenn** für **wan.**

— 348. Z. 7. v. u. steht $b^2\,b$ für $b^2)b$

Z. 2. v. u. steht §. 214. für §. 215.

— 349. Z. 4. steht §. 214. für §. 215.

Z. 13. steht §. 213. für §. 214.

Letzte Z. steht $\sqrt[4]{}$ für $\sqrt[3]{}$

— 351. Z. 5. steht $= a$ für $= a^3$

— 352. Z. 1. steht §. 212. für §. 213.

— 360. Z. 11. steht 243 für 243^3

— 361. Z. 3. v. u. steht so für z u.

— 372. Z. 6. v. u. steht §. 159. für §. 154.

— 376. Z. 2. v. u. streiche man T. I. Cap. 12. weg.

— 378. Z. 10. 11. steht 706,425 für 13,28

6 3,28 537 25

— 385. Z. 2. steht 2^- für 2^{-I}

Z. 7. steht 16^{-IV} für 16^{-III}

— 388. Z. 4. steht 766 für 760.

Z. 13. steht §. 234. für §. 239.

— 390. Z. 9. steht §. 239. für §. 240.

und §. 240. für §. 241.

Z. 15. steht §. 239. für §. 240.

— 391. Z. 9. steht §. 239. für §. 240.

Z. 4, 5. v. u. steht **selbst am Ende,** für **in der Wurzel.**

— 394. Z. 11. ist L. wegzustreichen.

Seite 394. Z 6. v. u. steht §. 138. für §. 163.
Z. 3. v. u. steht §. 140 für §. 165.
— 395. Z. 14. steht ^{5} für $\frac{5}{8}$
— 399. Z. 2. v. u. steht §. 237. für §. 238.
— 408. Z 12 steht §. 135. für §. 136, 129.
Z. 14. steht §. 101. für §. 129.
Z. 16. steht §. 105. für §. 129.
— 412. Z. 8. v. u steht §. 251. für §. 252.
— 413. Z. 9. ist der Deutlichkeit wegen, für —a und —b zu setzen —+a, und —+b, wie aus Z. 15. erhellt. Ein Gleiches gilt von Z. 17. wo auch das Zeichen + hinter — einzuschieben ist, weil Z. 19 es erfodert.
— 420. Z. 3 u. 4. steht ·.· für ⁘
— 424. Z. 4 steht a+d für a$\pm$d
— 425. Z. 11. steht §. 260 für §. 263.
— 429. Z. 9. steht §. 226. für §. 262.
Z. 10. steht § 129. für §. 265.
— 430. Z. 6. v. u. ist ganz wegzustreichen.
Z. 7. v. u solten die Punkte zwischen a und b, und zwischen 12 und 4, näher an einander stehn, oder einem liegenden Kolon gleichen, so:

a . . b ; . 12 . . 4.

Diese Erinnerung ein für alle Mal.
— 433. Z 10. steht $1{,}73205 = 0{,}43201$ (§. 248)
für $\frac{1{,}73205}{4} = 0{,}433011$ (§. 248)
Z. 5. v. u. steht zwei Mal 1,73205 „ welches nur das erste Mal richtig, das

zweite Mal aber in 173205,.. zu verändern ist.

Z. 2. v. u. steht a:b für a . . b

Seite 434. Z. 2. steht den für dan

Z. 12. steht §. 232. für §. 268.

— 435. Z. 5. steht wird dadurch, für wird es dadurch.

Z. 14. ist so zu ändern: S. Namen

von $\frac{a}{m} \cdot \cdot \frac{b}{m} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$ (§. 115) $= \frac{a : m}{b : m}$.

(§. 114) $= \frac{a}{b}$ (§. 84.)

— 438. Z. 3. v. u. steht §. 232. für § 269.

— 439. Z. 7. ist so zu ändern: Also . .?

S. Wenn a . . b = c . . d;

— 440. §. 281. Z. 1. wird weggestrichen.

Z. 2. wird L. vorangesetzt, und zwischen diese und die folgende Zeile wird ein Strich gezogen.

— 441. §. 282. Z. 2. v. u. steht einerlei gleichen für einerlei, oder gleichen.

§. 283. steht zehn Mal : für . .

— 443. Z. 14. ist am Ende hinzuzufügen (§. 108)

— 446. Z. 4. steht §. 17. für § 20.

— 448. Z. 7. v. u. st. erhalten für verhalten.

Eben daselbst ist der Punkt hinter Summe, in ein Komma zu verwandeln.

— 450. Z. 2. v. u. ist hinzuzufügen (§. 27).

Letzte Zeile ist hinzuzufügen (§. 385).

— 451. Z. 6. v. u. steht c für e.

Seite 451. Z. 3. v. u. ist hinzuzufügen (§. 51).
Z. 2. v. u. ist hinzuzufügen (§. 99).
— 453. Z. 8. v. u. steht nach für nach.
— 455. Z. 5. ist hinzuzufügen (§. 51).
— 457. §. 295. Z. 5. steht zwei Mal : . für . .
— 458. Letzte Z. steht §. 17. für §. 20.
— 466. Z. 4. v. u. steht : für ..
und Zins. x für Zins. . . x
— 467. Z. 4. steht zwei Mal : für . .
— 470. Z. 8. steht §. 243. für §. 294.
— 471. Z. 9. v. u. steht Durch für durch
— 475. letzte Z. steht 8090.. für 14,8090 ::
— 479. Z. 3. v. u. steht Eluer für Euler.
— 480. §. 310. Z. 4. steht einer für einen.
— 481. §. 312. Z. 3. steht wie für und
— 483. Z. 13. ist wegzustreichen.
— 486. Z. 11. steht 65. für 35.
— 489. Z. 3. steht denn für dan.
Letzte Z. steht Element. für Elemente.
— 491. 492. 493. steht siebzehn Mal : für . .
— 494. Z. 12. steht $\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$ .. für $\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 . .
— 496. Z. 2. u. 3. v. u. steht 504 für 534.
— 499. Z. 5. v. u. steht $S\frac{vii-a}{n-1}$ für $S = \frac{vii-a}{n-1}$
— 500. Z. 9. v. u. steht verlauten für verleiten.
— 533. Z. 5. v. u. streiche man sich weg.
— 535. Z. 2. streiche man und weg.
Z. 3. steht sucht für und sucht.
Z. 4. steht ihnen für ihr.

Bayerische Staatsbibliothek München

zu pag 447. (§ 287.

Wenn $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$ u. $d = 12$. so ist

$a : b = c : d$ in Zahl. $2 : 4 = 6 : 12$.

$(a+c) : (b+d) = c : d$ — $(2+6) : (4+12) = 6 : 12$

wird das erste mit dem 3te Glied, und das 2te mit dem 4te Gliede dividirt |: welches nach meiner Regel § 4 erlaubt ist :| so ist die ganze Proportion $a : b$ od. $2 : 4$

Der Beweis ist nach der Seite 448.

man vergleiche hiezu Zusätze pag 202–204 u. pag 406. 410. 430, 432.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Winterfeld, Moritz Adolph <<von>>,

Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauch in Schulen und für Selbstlehrlinge

Bd.: 2

Braunschweig 1802

Math.u. 212 m-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594363-9
(null)